Шананин Александр Алексеевич

ММЭ

4.09.19

Лист 1

Математические модели в экономике

Литература:

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и мат. экономика
2. Ашманов С. А. Введение в мат. экономику
3. Экланд И. Элементы мат. экономики
4. Обен Ж-П. Нелинейный анализ и его эконом. приложения

Глава 1. Модели межотраслевого баланса и теории неотриц. матриц

§ 1. Модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева.

Прославился из-за анализа Великой Депрессии США.

Лауреат Нобелевской премии, на его идее

Выехала Япония - „Японское чудо"

Леонтьев изучал временные ряды поставок и объёмы пр-ва.

Товаров в мире $\approx 10^9$ и меняется $\Rightarrow$ нужно базис

Концепция - Ввести „чистые отрасли" (продукты)

Разбиваем все на части - чистые отрасли. Это требует хорошей подготовки.

Допустим, что в советское время было $n = 18$ отраслей

В ГосПлане $n = 96$

В США $n \approx 100$

Есть точнее $n \approx 300$

Пытались сделать с $n = 1000$, но не пошло

В 90-ые было 25-28 и всё менялось (это плохо, т.к. меняется)

$X_i(t)$ - объем пр-ва i-ой области в период времени t (t - начальный год. иногда месяц)

$Z_{ij}(t)$ - затраты продукции i-ой отрасли на пр-во j-ой отраслью в период времени t.

$w_i(t)$ - объем продукции i-ой отрасли, который поступает конечным потреб. в период времени t.

Леонтьев изучал временные ряды за 2 десятилетия:

$$\{ X_i(t),\ Z_{ij}(t) \mid t = 0,\dots,T;\ i,j = 1,\dots,n \}$$

Просто ряды ничего не дали, поэтому он посчитал

норму затрат $\boxed{\dfrac{Z_{ij}(t)}{X_i(t)} \approx a_{ij} \geq 0}$ Она была примерно постоянной уже, т.е. не зависит от времени

$A = \| a_{ij} \|_{i,j=1,n}$ - матрица прямых затрат (Леонтьева)

С 1000 не вышло, т.к. отрасли взаимозаменялись

и поэтому $a_{ij} \neq const$ => не вышло.

У нас (в разв. странах) такое проявляется из-за

разделения внутр. продукта и внешнего

Мы <u>игнорируем запас.</u>

$$X_i = \sum Z_{ij} + w_i \quad (i = 1,\dots,n)$$

$\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ - вектор объемов пр-ва

$\vec{w} = (w_1,\dots,w_n)^T$ - вектор конечных выпусков

$$\boxed{\bar{x} = A\bar{x} + \bar{w} \qquad \bar{x} \geq 0 \quad \bar{w} > 0}$$

- поиск драйвера экономики происх. до сих пор: It, биотех
- Анализ ур-ия даёт доп. информацию.

В СССР при анализе экономики вышло, что нет решений.

Это было связано с обработкой, т.е. если её закрыть было бы лучше, но кого-то это не устроило, мол это неправда.

def 1

Будем говорить, что матрица

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$ является продуктивной,

если $\exists$ $\bar{x} \geq 0$, $\bar{w} > 0$ такие, что

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{w}$$

У нас $A = \|a_{ij}\| \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $a_{ij} \geq 0$, $i,j = \overline{1,n}$

$\bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$

$\bar{w} > 0 \Leftrightarrow w_i > 0$

Простейшая динамическая модель Леонтьева

Нам нужно сначала вложиться в пр-во, а потом уже получить результат.

$$\bar{x}(t) = A\,\bar{x}(t+1) + \bar{w}(t+1)$$

Режим сбалансированного роста:

$$\boxed{\begin{matrix} \bar{x}(t) = S^t \hat{x} & \hat{x} \geq 0,\ S > 0 \\ \bar{w}(t) = S^t \hat{w} & w > 0 \end{matrix}}$$

$$s^t \hat{x} = s^{t+1} A \hat{x} + s^{t+1} \hat{w}$$

$$\boxed{\frac{1}{s}\hat{x} = A\hat{x} + \hat{w}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{s}E - A\right)\hat{x} = \hat{w}}$$

$\mathcal{D} = \frac{1}{s}E - A$

$\mathcal{D} = \|d_{ij}\|_{i,j=1,n}$ $\quad d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$

def 1'

Будем говорить, что матрица $\mathcal{D} = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовл. усл. $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ (1)

является продуктивной, если

$\exists\ \bar{x} \geq 0$ такой, что $\mathcal{D}\bar{x} > 0$

§ 2. Продуктивные матрицы

Теорема 1

Пусть $\mathcal{D} = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ матрица удовл. условию (1).

Тогда следующие утверждения эквивалентны

1) $\exists\, \bar{x} \geq 0 : \mathcal{D}\bar{x} > \bar{w}$, т.е. что $\mathcal{D}$ - продуктивна | т.е. мы можем $\forall \bar{w}\ \theta$ найти подх. $\bar{x}$.

$\Uparrow$

2) $\forall \bar{w} \geq 0\ \exists\, \bar{x} \geq 0 : \mathcal{D}\bar{x} = \bar{w}$

3) (условие Хокинса-Саймона)

$$\det\begin{pmatrix} d_{11}, & d_{12}, & \dots, & d_{1k} \\ d_{21}, & d_{22}, & \dots, & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1}, & d_{k2}, & \dots, & d_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

т.е. последовательные главные миноры > 0

$k = \overline{1, n}$

4) $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$\det\begin{pmatrix} d_{i_1 i_1}, & d_{i_1 i_2}, & \dots, & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1}, & d_{i_2 i_2}, & \dots, & d_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i_k i_1}, & d_{i_k i_2}, & \dots, & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

т.е. ~~последовательные~~ все главные миноры > 0

$k = \overline{1, n}$

11.09.19

Д-во:

- 2) => 1) очевидно
- 4) => 3) очевидно

Шаг 1 1) => 3) (мат. индукции по n)

- $n = 1$ $\quad \exists\, x_1 \geq 0 \quad d_{11} x_1 = w_1 > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$
- Пусть верно для $n-1$:

$$(2) \begin{cases} d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n = w_1 \\ d_{21} x_1 + d_{22} x_2 + \dots + d_{2n} x_n = w_2 \\ \dots \\ d_{n1} x_1 + d_{n2} x_2 + \dots + d_{nn} x_n = w_n \end{cases}$$

$\exists\, w_1 \dots w_n > 0$

$\exists\, x_1 \geq 0 \dots x_n \geq 0$

$$d_{11} x_1 = \underset{\substack{\wedge\!|\\ 0}}{w_1} - \underset{\substack{\vee\!|\\ 0}}{d_{12}}\, x_2 - \dots - \underset{\substack{\wedge\!|\\ 0}}{d_{1n}}\, \underset{\substack{\vee\!|\\ 0}}{x_n} \Rightarrow d_{11} > 0$$

Сделаем шаг по м. Гаусса:

$$(2')\ \begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = w_1 \\ (3)\begin{cases} \hat d_{22}x_2 + \ldots + \hat d_{2n}x_n = \hat w_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat d_{n2}x_2 + \ldots + \hat d_{nn}x_n = \hat w_n \end{cases} \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} \hat d_{ij} = d_{ij} - d_{1j}\dfrac{d_{i1}}{d_{11}} \quad (i,j = 2,\ldots,n) \\ \hat w_i = w_i - w_1\dfrac{d_{i1}}{d_{11}} \end{cases}$$

$$\hat{\mathcal{D}} = \|\hat d_{ij}\|_{i,j=\overline{2,n}}$$

$$\hat d_{ij} = \underset{\leq 0}{d_{ij}} - \underset{\leq 0}{d_{1j}}\,\frac{d_{i1}}{\underset{> 0}{d_{11}}} \leq 0 \quad (i,j = 2\ldots n)$$

$$\hat w_i = \underset{> 0}{w_i} - \underset{> 0}{w_1}\,\frac{d_{i1}^{\,<0}}{\underset{> 0}{d_{11}}} > 0 \quad (i = 2,\ldots,n)$$

По инд. предположению получаем, что посл. гл. миноры >0

$$(5)\quad \det\begin{pmatrix} \hat d_{22}, \ldots, \hat d_{2k} \\ \vdots \\ \hat d_{k2}, \ldots, \hat d_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (k = 2,\ldots,n)$$

$$\det\begin{pmatrix} d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1k} \\ d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ d_{k1}, d_{k2}, \ldots, d_{kk} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ 0 & \hat d_{22} & \ldots & \hat d_{2k} \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & \hat d_{k2} & \ldots & \hat d_{kk} \end{pmatrix} = d_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} \hat d_{22} & \ldots & \hat d_{2k} \\ \ldots & & \ldots \\ \hat d_{k2} & \ldots & \hat d_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (6)$$

Шаг 2 $\quad$ 3) => 2) $\quad$ (мат. индукция по n)

$n = 1$ $\quad d_{11} > 0 \Rightarrow w_1 \geq 0 \qquad x_1 = \dfrac{1}{d_{11}}\cdot w_1 \geq 0$

Аналогично с пред. точкой проверяем $\exists?\ \bar x \geq 0?$

По индукт. предполож. $\exists\ x_2,\ldots,x_n \geq 0$, удовл. (3)

$$x_1 = \frac{1}{\underset{> 0}{d_{11}}}\left(\underset{\geq 0}{w_1} - \underset{\leq 0}{d_{12}}\,\underset{\geq 0}{x_2} - \ldots - \underset{\leq 0}{d_{1n}}\,\underset{\geq 0}{x_n}\right)$$

Шаг 3

$1) \overset{\text{ш1}}{\Leftrightarrow} 3) \overset{\text{ш2}}{\Leftrightarrow} 2) \Leftrightarrow 1)$

Зафиксируем $i_1, i_2, \dots i_k$

Покажем $2) \Rightarrow 4)$

$2)$: $\forall \bar{w} \geq 0 \quad \exists x \geq 0 \quad : \quad \mathcal{D}\bar{x} = \bar{w}$

Рассм. перестановку $\pi = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_k, & \dots \\ 1, & 2, & \dots, & k, & \dots \end{pmatrix}$ E_π

$E_\pi \cdot \bar{x} = \bar{x}_\pi \qquad \bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{x}_\pi \geq 0$

$E_\pi \bar{w} = \bar{w}_\pi \qquad \bar{w} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{w}_\pi \geq 0$

$E_\pi E_\pi^* = E_\pi^* E_\pi = E \qquad \mathcal{D}_\pi = E_\pi \mathcal{D} E_\pi^*$

$E_\pi \mathcal{D} \bar{x} = E_\pi \bar{w} \Leftrightarrow (E_\pi \mathcal{D} E_\pi^*)(E\bar{x}) = E_\pi \bar{w}$

$\mathcal{D}_\pi \bar{x}_\pi = \bar{w}_\pi \qquad 2)_\pi \quad \forall w_\pi \geq 0 \quad \exists x_\pi \geq 0 \; : \; \mathcal{D}_\pi \bar{x}_\pi = \bar{w}_\pi \Rightarrow 3)_\pi$

Замечание:

$n = 1$ многие макро эконом. модели.

$x_1 = a_{11} x_1 + w_1$

$a_{11} < 1$ чтобы выпускали больше, чем затрачивали $\qquad \mathcal{D} = 1 - a_{11}$

$n = 2$

$x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + w_1$

$x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + w_2$

$\boxed{0 \leq a_{11} \leq 1 \qquad 0 \leq a_{22} \leq 1}$

$$x_2 = \frac{1}{1 - a_{22}} (w_2 + a_{21} x_1)$$

$$x_1 = \left(a_{12} + \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{1 - a_{22}}\right) x_1 + \left(w_1 + \frac{a_{12}}{1 - a_{22}} w_2\right)$$

$$\boxed{a_{12} + \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{1 - a_{22}} < 1} \qquad \frac{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12} \cdot a_{21}}{1 - a_{22}} > 0$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$$

О советской экономике:

$\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$ - вектор цен

$\pi_j = p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$

$\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ - вектор добавл. стоимостей

$$\boxed{\bar{\pi} = \bar{p} - A^* \bar{p} \qquad \exists\, \bar{p} \geq 0 \quad \bar{\pi} > 0}$$

Теорема 1'

Пусть $\mathcal{D} = \| d_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$ удовл. усл. $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ (1)

Тогда след. утв. экв-ны:

1. $\exists\, \bar{x} \geq 0 : \mathcal{D}\bar{x} > 0$
2. $\forall\, \bar{w} \geq 0 \ \exists\, \bar{x} \geq 0 : \mathcal{D}\bar{x} \geq 0$
3. Все посл. главные миноры $\mathcal{D}$ положительны
4. Все главные миноры $\mathcal{D}$ полож.
5. $\exists\, \bar{p} \geq 0 : \mathcal{D}^* p > 0$
6. $\forall \bar{\pi} \geq 0 \quad \exists\, \bar{p} \geq 0 : \mathcal{D}^* \bar{p} = \bar{\pi}$
7. Все посл. гл. миноры $\mathcal{D}^*$ полож.
8. Все гл. миноры $\mathcal{D}^*$ положительны
9. $\exists\, \mathcal{D}^{-1} \geq 0$ (т.е. $\mathcal{D}$ неотриц. обратима)

Д-во:

1) <=> 2) <=> 3) <=> 4) (по т.1 для м. $\mathcal{D}$)

$\Updownarrow$

5) <=> 6) <=> 7) <=> 8) (по т. 1 для м. $\mathcal{D}^*$)

9) => 2) $\quad \forall \bar{w} \geq 0 \quad \bar{x} = \mathcal{D}^{-1}\bar{w} \geq 0$

3) => $\det \mathcal{D} > 0 \Rightarrow \exists\, \mathcal{D}^{-1}$

2) $\forall\, \bar{w} \geq 0 \quad \mathcal{D}^{-1}\bar{w} \geq 0 \qquad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{e}_i \geq 0 \Rightarrow \mathcal{D}^{-1}\bar{e}_i \geq 0$

$\mathcal{D}^{-1} e_i$ - i-ый столбец $\mathcal{D}^{-1} \Rightarrow \mathcal{D}^{-1} \geq 0$

$\mathcal{D} = E - A$

$\mathcal{D} = (pE - A) \quad p = \frac{1}{s}$

$(n=1)$ $\quad \frac{1}{1-a_{11}} = 1 + a_{11} + a_{11}^2 + \ldots + a_{11}^k + \ldots \qquad 0 < a_{11} < 1$

$$(E-A)^{-1} \overset{?}{=} E + A + A^2 + \ldots$$

ряд Римана

$$p > 0 \quad (pE - A)^{-1} = \frac{1}{p}\left(E - \frac{1}{p}A\right)^{-1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} A^k \quad \text{, где } A^0 = E$$

Теорема 2

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$

Тогда

1) если $\exists\, (pE - A)^{-1} \geq 0$, то $p > 0$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} A^k$ (7) сх-ся и его сумма равна $(pE-A)^{-1}$.

2) если $p > 0$ и ряд (7) сх-ся, то $\exists\, (pE-A)^{-1} \geq 0$

Замечание:

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{w} \qquad \bar{x} = (E-A)^{-1} w = \bar{w} + A\bar{w} + A^2\bar{w} + \ldots$

Д-во:

1) $\exists\, (pE-A)^{-1} \geq 0 \overset{\text{по Т.1'}}{\Longrightarrow} \{ 9 \Leftrightarrow 3 \}$ Все гл. миноры $(pE-A)$ полож. $\Rightarrow \underset{\substack{\vee\!\!| \\ 0}}{p - a_{11}} > 0 \Rightarrow p > 0$

Рассм. частн. суммы (7): $T_s = \sum\limits_{k=0}^{s} \frac{1}{s^{k+1}} A^k \geq 0$

Очевидно, что $\quad T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_s \leq T_{s+1} \leq \ldots$

$$(pE - A)T_s = T_s(pE - A) = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{p^k} A^k - \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{p^{k+1}} A^{k+1} = E - \frac{A^{s+1}}{p^{s+1}} \quad (8)$$

$$T_s = (pE-A)^{-1}(pE-A)T_s = (pE-A)^{-1}\left(E - \frac{A^{s+1}}{p^{s+1}}\right) = (pE-A)^{-1} - \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\frac{1}{p^{s+1}}} \underset{\substack{\vee\!\!| \\ 0}}{(pE-A)^{-1}} \underset{\substack{\vee\!\!| \\ 0}}{A^{s+1}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 < T_s \leq (pE-A)^{-1}$ т.е. T_s - монот. огр. посл-ть $\Rightarrow \exists \lim\limits_{s\to\infty} T_s = T \geq 0$ (9)

$\Rightarrow p(\underbrace{T_{s+1} - T_s}_{s\to\infty \;\to 0}) = \overbrace{\frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1}}^{\overset{s\to\infty}{\to} 0}$, т.е. $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} = 0 \quad (10)$

в (8) перейдем к $\lim\limits_{s\to 0} \Rightarrow$

$(pE - A)T = T(pE-A) = E$

2) Пусть (7) сх-ся и $p > 0$ $\qquad T = (pE - A)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim T_s = T \geq 0$ по опр $T_s \Rightarrow p(T_{s+1} - T_s) = \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{s \to \infty} \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} = 0$$

В (8) перейдем к $\lim\limits_{s \to \infty} \Rightarrow (pE - A)T = T(pE - A) = E$

$$T = (pE - A)^{-1}$$

□

§ 3. Спектральные свойства неотр. матриц

(A)

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 \quad \lambda_{1,2} = \pm i$

Лемма 1

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$ и $M(A) = \{p \mid (pE - A)^{-1} \geq 0\}$

Тогда $M(A) = (\lambda(A), +\infty)$, где $\lambda(A) \geq 0$

Д-во:

Шаг 1

Покажем, что $M(A) \neq \varnothing$ $\quad$ Фикс. $\forall \hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \hat{p} > \max_i \frac{[A\hat{x}]_i}{\hat{x}_i}:$$

$\hat{p}\hat{x} > A\hat{x} \Leftrightarrow (\hat{p}E - A)\hat{x} > 0$, т.е. $\hat{p}E - A$ - продукт. $\overset{Т.1'}{\Longrightarrow}$

$\overset{Т.1'}{\Longrightarrow} \exists (pE - A)^{-1} \geq 0$ и $\hat{p} \in M(A) \Rightarrow M(A) \neq \varnothing$

Шаг 2

Покажем $\forall \eta > p$ и $p \in M(A)$, то $\eta \in M(A)$

Если $p \in M(A) \overset{Т.1'}{\Longrightarrow} (pE - A)$ - продукт. $\Rightarrow \exists \bar{x} \geq 0 : (pE - A)\bar{x} > 0$, т.е. $p\hat{x} > A\hat{x} \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \eta\bar{x} > p\bar{x} > A\bar{x} \Rightarrow (\eta E - A)$ продукт $\overset{Т.1'}{\Longrightarrow} \eta \in M(A)$

Шаг 3

Опр. число $\lambda(A) = \inf\{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\} \geq 0$

Т.1' Все гл. миноры $(pE - A)$ полож $\Rightarrow$ $p - a_{11} > 0 \Rightarrow p > 0$

по Шагу 2 $\Rightarrow M(A) = (\lambda(A), +\infty)$

или

$M(A) = [\lambda(A), +\infty)$

Докажем, что

$\lambda(A) \notin M(A)$

$\boxed{П}$ $\exists \lambda(A) \in M(A) \overset{T1'}{\Rightarrow} (\lambda(A)E - A)$ - продукт., т.е. $\exists \hat{x} \geq 0: \lambda(A)\hat{x} > A\hat{x} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (\lambda(A) - \varepsilon)\hat{x} > A\hat{x} \Rightarrow [(\lambda(A) - \varepsilon)E - A]$ - продукт. $\overset{T1'}{\Rightarrow}$

$\overset{T1'}{\Rightarrow} \lambda(A) - \varepsilon \in M(A)$?! с опр $\lambda(A)$

□

Лемма 2

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$ $\quad M(A) = \{p \mid (pE - A)^{-1} \geq 0\} = (\lambda(A), +\infty)$

Тогда $\exists \bar{x}_A \geq 0,\ \bar{x}_A \neq 0: A\bar{x}_A = \lambda(A)\bar{x}_A$

Д-во:

Шаг 1

Фиксируем $\forall \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) > 0$. Пусть $p \in M(A)$ $(p > \lambda(A))$

Обозн. $\bar{y}(p) = (pE - A)^{-1}\bar{\omega} \geq 0 \Rightarrow p\bar{y}(p) - A\bar{y}(p) = \bar{\omega}$ (1)

Покажем, что если $\eta > p > \lambda(A)$, то $\bar{y}(\eta) \leq \bar{y}(p)$ т.е. $\bar{y}(p)$ монот. не возр. по p.

По опред. $\bar{y}(\eta)$: $\eta\bar{y}(\eta) = A\bar{y}(\eta) = \bar{\omega}$ (1')

Из (1) + (1') $\Rightarrow$ $(pE - A)(\bar{y}(p) - \bar{y}(\eta)) = (\eta - p)\bar{y}(\eta) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}(p) - \bar{y}(\eta) = \underset{\geq 0}{\underbrace{(\eta - p)}}\underset{\geq 0}{\underbrace{(pE - A)^{-1}}}\underset{\geq 0}{\underbrace{\bar{y}(\eta)}} \geq 0 \Rightarrow \bar{y}(p) \geq \bar{y}(\eta) \quad \forall \eta > p$

т.е. $\bar{y}(p)$ монот. не возр.

Шаг 2

$\exists\ p > \lambda(A)$ $\qquad \sigma(p) = \sum_{j=1}^{n} [\bar{y}(p)] > 0$, тогда

$\sigma(p)$ не возр. на $(\lambda(A), +\infty)$

Докажем, что $\lim\limits_{p \to \lambda(A)+0} \sigma(p) = +\infty$ (2)

$\boxed{П}$ $\lim\limits_{p \to \lambda(A)+0} \sigma(p) = M \Rightarrow \exists\ \hat{\sigma}(p) < +\infty : \sigma(p) \leq \hat{\sigma}$ при $p > \lambda(A)$ $\Rightarrow 0 \leq [y(p)]_{j=\overline{1,n}} \leq \hat{\sigma}$ при $\lambda > p(A) \Rightarrow$

$\underset{\text{монот } y(p)}{\overset{\text{в силу}}{\Rightarrow}} \exists \lim\limits_{p \to \lambda(A)+0} y(p) = \hat{y} \geq 0$

Перейдем в (1) к $\lim\limits_{p \to \lambda(A)+0}$ $\Rightarrow \lambda(A)\hat{y} + A\hat{y} = \bar{\omega} > 0$, т.е. $(\lambda(A)E - A)$ - прод $\overset{T1'}{\Rightarrow}$

$\overset{T1'}{\Rightarrow} \lambda(A) \in M(A)$?! (лемма 1)

Шаг 3

$p > \lambda(A)$ и $x(p) = \frac{1}{\sigma(p)} \bar{y}(p) \in \overset{\text{компакт.}}{K} = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0, \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$

Возьмем посл. $p(t)$, где $t = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$, сход. сверху к $\lambda(A)$

~~Выделим из посл. $p(t)$ сход. подпосл.~~

Выделим из $x(p(t) \mid t = 1, 2, \dots) \in X$ сх-ся п/п

$\lim_{\tau \to \infty} \bar{x}(p(t(\tau))) = \bar{x}_A \in K \Rightarrow \bar{x}_A \geq 0$, $\bar{x}_A \neq 0$ (3)

Если $p > \lambda(A)$ из (1) $\Rightarrow$

$$p\bar{x}(p) - A\bar{x}(p) = \frac{1}{\sigma(p)} \bar{w} \quad (4)$$

Перейдем в (4) для $p = p(t(\tau))$ к $\lim_{\tau \to \infty} \Rightarrow \lambda(A)\bar{x}_A - A\bar{x}_A = 0$ * из ш 2

□

Теорема 3 (Фробениус - Перрон)

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$.

Тогда 1) среди СЗ матр A есть неотр СЗ и наиб. из них $\lambda(A)$ соотв. неотр СВ $\bar{x}_A$

2) $\exists (pE - A)^{-1} > 0 \Leftrightarrow p > \lambda(A)$

3) Если $\bar{y} \geq 0, \bar{y} \neq 0$ $A\bar{y} \geq \mu\bar{y}$, то $\mu \leq \lambda(A)$

4) Если $\bar{z} \in \overset{\text{компл.}}{\mathbb{C}^n} \setminus \{0\}$ $A\bar{z} = \omega\bar{z}$, то $|\omega| \leq \lambda(A)$

Д-во

1), 2) $\Rightarrow$ л. 1, л. 2 т.к. при $p > \lambda(A)$ $(p \in M(A))$ из Т 1' $\Rightarrow \det(pE - A) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p > \lambda(A)$ не явл СЗ A.

3) П $\bar{y} \geq 0$ $\bar{y} \neq 0$ $\mu\bar{y} \leq A\bar{y}$ $(\mu E - A)\bar{y} \leq 0$

и при этом $\mu > \lambda(A) \overset{\text{из } 2)}{\Rightarrow} \exists (\mu E - A)^{-1} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y} = (\mu E - A)^{-1}(\mu E - A)\bar{y} \leq 0$!?

4) Пусть $\exists \bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \neq 0$ $z_k \in \mathbb{C}$, $A\bar{z} = \omega\bar{z}$

$y_i = |z_i|$ $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \geq 0$ $\bar{y} \neq 0 \Rightarrow |\omega||y_i| = |\omega z_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| \leq$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|z_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Rightarrow |\omega|\bar{y} \leq A\bar{y} \overset{3)}{\Rightarrow} |\omega| \leq \lambda(A)$$

□

def

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$ $\lambda(A) = \inf\{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\}$ - число Фробениуса-Перрона A,

а соотв. СВ $\bar{x}_A \geq 0$ ($\bar{x}_A \neq 0$, $A x_A = \lambda(A) \bar{x}_A$) - Вектор Фробениуса-Перрона A.

Замечание

Дин. модель Леонтьева $x(t) = A\, x(t+1) + \omega(t+1)$, A - прод

$\bar{x}(t) = S^t \hat{\bar{x}}$, $\omega(t) = S^t \hat{\omega} \Rightarrow \frac{1}{S}\hat{x} = A\hat{x} + \hat{\omega}$ $\hat{x} \geq 0$, $\hat{\omega} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{x} = \underbrace{(\frac{1}{p} E - A)}_{\text{прод}}^{-1} \hat{\omega}$ $\frac{1}{S} > \lambda(A) \Leftrightarrow S < \frac{1}{\lambda(A)}$ Число, обр. к числу ФП - это технологич. огр. темпа роста в прост. модели.

Свойства числа ФП

$A = \|a_{ij}\| > 0$, $\lambda(A)$ - ЧФП

1) $\lambda(A^*) = \lambda(A)$

2) если $\alpha > 0$, то $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$

3) $\lambda(A^t) = (\lambda(A))^t$ $t \in \mathbb{N}$

4) если $A \geq B \geq 0 \Rightarrow \lambda(A) \geq \lambda(B)$

5) если C - гл. подматрица $A \Rightarrow \lambda(A) \geq \lambda(C)$

6) $\lambda(A) = 0 \Leftrightarrow A^n = 0$

Д-во:

1), 2) - очев.

3) По т3 $\exists \bar{x}_A \neq 0$, $\bar{x}_A \geq 0$: $A\bar{x}_A = \lambda(A)\bar{x}_A \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 x_A = \lambda(A) A x_A = (\lambda(A))^2 x_A \Rightarrow$ если $A^k \bar{x}_A = \lambda(A)^k x_A \Rightarrow A^{k+1}\bar{x}_A = (\lambda(A))^k A x_A = (\lambda(A))^{k+1} x_A$

$\Rightarrow (\lambda(A))^t$ - СЗ $A^t \Rightarrow \lambda(A^t) \geq (\lambda(A))^t$

$\exists\ \lambda(A^t) > (\lambda(A))^t$ Обозн. $\hat{p} = (\lambda(A^t))^{1/t} > \lambda(A)$

$\Rightarrow \hat{p} \in M(A) \overset{\text{т.1'}}{\Rightarrow} \exists (\hat{p}E - A)$ - прод, т.е. $\exists \hat{x} \geq 0$ $\hat{p}\hat{x} > A\hat{x} \geq 0 \Rightarrow \hat{x} > 0$

$\exists (\hat{p})^k \hat{x} > A^k \hat{x} \underset{\text{инд.}}{\overset{\text{по}}{\Longrightarrow}} (\hat{p})^{k+1}\hat{x} > (\hat{p})^k A\hat{x} \geq A^{k+1}\hat{x}$

Для $k = t$ $(\hat{p})^t \hat{x} > A^t \hat{x} \Rightarrow (\lambda(A^t) E - A^t)$ - прод $\Rightarrow \exists [\ldots]^{-1} > 0 \xrightarrow{\text{т 3}} \lambda(A^t) \in M(A^t)$

!? л3

4) $\lambda(A) = \inf\limits_{\rho \in M(A)} \rho \qquad \lambda(B) = \inf\limits_{\rho \in M(B)} \rho$

Д-м: $M(B) \overset{?}{\supseteq} M(A)$

$\rho \in M(A) \overset{T1'}{\Rightarrow} \exists \hat{x} \geq 0 \quad \rho\hat{x} > A\hat{x} \geq B\hat{x} \Rightarrow (\rho E - B)$ - прод $\overset{T1'}{\Rightarrow} \exists (\rho E - B)^{-1} \geq 0$

и $\rho \in M(B) \Rightarrow M(A) \subseteq M(B)$

5) Без огр. общ

$$A = \begin{pmatrix} C & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0 \qquad C^{n_1 \times n_1} \quad A_{22}^{n_2 \times n_2}$$

Введём $B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ оч. $A \geq B \geq 0 \overset{4)}{\Rightarrow} \lambda(A) \geq \lambda(B)$

Проверить, что $\lambda(B) \overset{?}{=} \lambda(C) \Rightarrow \lambda(B) = \lambda(C)$

6) - ?

def 5 и еще одна лекция пропущена

там есть кусок док-ва т.5

ММ7 2.10.19 Лист

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$ неразл. матрица. Будем говорить, что A допускает циклическое разложение, если $\exists$ непустые подмнож. $J_0, J_1, \dots, J_{s-1}$ $s \geq 2$, множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что:

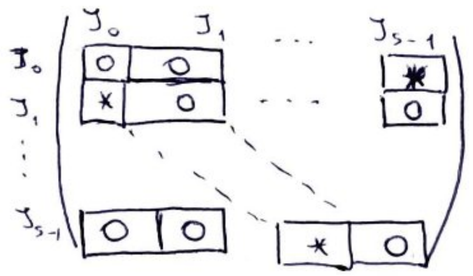
1) $J_k \cap J_l = \varnothing \quad \forall k \neq l$

2) $\bigcup\limits_{k=0}^{s-1} J_k = N$

3) если $a_{ij} > 0$ и $j \in J_k$,

то $i \in J_{k+1 (\mathrm{mod}\, s)}$

P.S.

$E_\pi A E_\pi^* =$ 

Теорема 6

Пусть $A = \|a_{ij}\| \geq 0$ неразл. матрица.
Тогда сл. утв. экв-ны:

1) A - уст. матрица, т.е. $\exists k: A^k > 0$

2) A не допускает циклических разложений

3) Н.О.Д. $\{t \mid [A^t]_{ij} > 0\} = 1$

4) если $A \cdot \bar{z} = \omega \bar{z}$ $\quad \bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad |\omega| = \lambda(A)$, то $\omega = \lambda(A)$

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - неразл., неуст., допуск. цикл. разл. $J_0 = \{1\}$ $J_1 = \{2\}$

$$\text{НОД } \{t \mid [A^t]_{i,j} > 0\} = 2$$

$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

Замечание:

$t = 1, 2, \dots$

$\{1, 2, \dots, n\}$

$[\bar{y}(t)] = \text{Вер}\{x(t) = i\}$

$\bar{y}(t)$ - распределение вер-тей

$a_{ij} = \text{Вер}\{x(t+1) = i \mid x(t) = j\} \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ - матрица переходных вер-тей

$\bar{y}(t+1) = A\bar{y}(t)$

$\lim\limits_{t\to\infty} \vec{y}(t) = \vec{x}_A$ - финальное распр. вер-тей

§6. Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательности и их приложения

$\mathbb{R}_+$ $\quad a \oplus b = \max(a, b)$

$a \odot b = a \cdot b$ + отн. „$\cdot$" - абелева группа

$(a \oplus b) \odot c = a \odot b \oplus b \odot c$

$\boxed{a \oplus a = a}$ идемпотентность

Отн. этих операций аналог Функана → Многознак

Лин.опр → ДинПрог ($\overset{\text{ур-ие}}{\text{НЯБ}}$)

$\mathbb{R}_+$, $a \oplus b = \max(a,b)$ $a \odot b = a \cdot b$ $a \oplus a = a$ идемпотентная мат-ка

ММЭ

9.10.19

Лист

6.1 Модель баланса знаний Канторовича-Макарова

$1, 2, \ldots, n$

x_i - иссл. по i-ому напр. / распр. денег ; a_{ij} - связь между i и j отр.

$$\begin{cases} a_{ij} x_j \le x_i & j = \overline{1,n} \\ x_1 > 0 \ldots x_n > 0 \end{cases}$$

правая от j не зависит $\Rightarrow \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} x_j \le x_i \quad i = \overline{1,n}$

$\Downarrow$

$A = \| a_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$ если с-ма разрешима, то проект реализуем $A^{\oplus} \bar{x} \le \bar{x}$

def 6

Будем говорить, что $A = \| a_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$ экв. продукт. в идемпотентном смысле, если $\exists \ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) > 0 : \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} x_j \le x_i \ (i = \overline{1,n})$, т.е. $A^{\oplus} \bar{x} \le \bar{x}$

6.2 Арбитражные цепочки на валютном рынке

Пусть есть $1, 2, \ldots n$ валют ($n \approx 20\text{-}30$)

a_{ij} - кол-во валюты j, которую можно получить при обмене за единицу валюты i

$A = \| a_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$ - матрица кросс-курсов

def 7

Будем говорить, что матрица кросс-курсов $A = \| a_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$ имеет арбитражную цепочку $(i_1, \ldots, i_k)$, если

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} > 1$$

Задача 1

По матрице кросс-курсов A определить, есть ли арб. цепочки, и, если есть, то найти их.

P.S

$\sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k \cdot k! \Rightarrow$ в лоб решать это глупо (не решим) $\left(n! \right)$???
???

Банки в неуст. случаях берут комиссию =>

=> прибыль не a_{ij}, а $\frac{a_{ij}}{r}$ $r > 1$ =>

=> чтобы не было цепочек

$$\forall (i_1, \dots, i_k) \quad a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k} a_{i_1} \leq r^k$$

<u>Задача 2</u>

По матрице кросс-курсов $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ найти минимальное значение r, при котором отс. арбитражные цепочки

<u>Рассказ о создании единой валюты в Европе</u>

Ценники во франках и в евро, но евро еще <u>не напечатали</u>
так тестили пару лет

$\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0$ x_i - кол-во новой валюты за старую

$a_{ij} x_j \leq x_i \quad (i, j = \overline{1,n})$ т.е. евро в одной и в другой валюте „одинаковые"

$\Downarrow$

A - продуктивная

i - франк

j - лира

<u>Th 7</u> (Африат, Вериан)

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$

Тогда следующие утв. эквивалентны:

1) $\exists \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) : \ a_{ij} x_j \leq x_i \quad i = \overline{1,n}$

2) $\forall k \geq 2 \quad \forall (i_1, \dots, i_k) \quad a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} \leq 1$

<u>Д-во:</u>

1) => 2)

$$\left.\begin{array}{l} a_{i_1 i_2} x_{i_2} \leq x_{i_1} \\ a_{i_2 i_3} x_{i_3} \leq x_{i_2} \\ \ldots \\ a_{i_{k-1} i_k} x_{i_k} \leq x_{i_{k-1}} \\ a_{i_k i_1} x_{i_1} \leq x_{i_k} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}) \prod_{j=1}^{k} x_{i_j} \leq \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$$

ММ7
9.10.19
Лист

2) => 1)

$$\hat{a}_{ij} = \sup_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\\ k\geq 0}} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k j}$$

$$a_{ii_1} (a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_1})^t a_{i_1 j}$$

$\hat{a}_{ij} = +\infty$, если есть арб. цепочки

$\hat{a}_{ij} < +\infty$, если нет арб. цепочек $\overset{\text{т.к.}}{\underset{\text{нет АЦ}}{\Rightarrow}}$ $\hat{A} = \| \hat{a}_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\hat{x}_i = \max_{1\leq j\leq n} \hat{a}_{ij} = \{ \hat{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0 \} = \sup_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\\ k\geq 1}} a_{1} a_{i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_k} \Rightarrow$$

$$\hat{x}_i \geq \sup_{(i_1,\dots,i_k)} a_{ij} a_j a_2 \dots a_{i_{k-1} i_k} =$$

$$= a_{ij} \left(\sup_{(i_1,\dots,i_k)} a_{j i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k} \right) = a_{ij} \hat{x}_j \qquad j,i = \overline{1,n}$$

□

Замечание:

$$\hat{A} = A \oplus A^{\oplus 2} \oplus \dots \oplus A^{\oplus k} \oplus \dots$$

Если цепочек нет, то конечная сумма: $\hat{A} = A \oplus A^{\oplus 2} \oplus \dots \oplus A^{\oplus n}$
(прод. в инд. смысле)

Упр
r - идемп. аналог числа ФП

Алгоритм Флойда - кого-то n^3

Глава 2 Экономическая интерпретация двойственности

Прямая задача

$\vec{c}\,\vec{x} \to \max \quad (1)$ $\qquad c \in \mathbb{R}^n$

$A\bar{x} \leq \bar{b} \quad (2)$ $\qquad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \in \mathbb{R}^m$

Двойственная:

$\bar{b}\bar{u} \to \min \ (3)$

$A^*\bar{u} = \bar{c} \quad (4)$

$\bar{u} \geq 0 \ (5)$

Задачи ЛП со смеш. огр.

$$\begin{cases} \bar{c}_1\bar{x}_1 + \bar{c}_2\bar{x}_2 \to \max & (6) \\ A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 \leq \bar{b}_1 & (7) \\ A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 \leq \bar{b}_2 & (8) \\ \bar{x}_1 \geq 0 & (9) \end{cases}$$

$\bar{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \bar{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

$\bar{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \ \bar{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$

$A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$

$A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$

$A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} \bar{b}_1\bar{u}_1 + \bar{b}_2\bar{u}_2 \to \min & (10) \\ A_{11}^*\bar{u}_1 + A_{21}^*\bar{u}_2 \geq c_1 & (11) \\ A_{12}^*\bar{u}_1 + A_{22}^*\bar{u}_2 = c_2 & (12) \\ \bar{u}_1 \geq 0 & (13) \end{cases}$$

ММЭ
16.10.19
Лист

§ 1. Некоторые сведения о теории двойств. в задачах ЛП

$$\bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2 \to \max \quad (1)$$

$$A_{11} \bar x_1 + A_{12} \bar x_2 \leq \bar b_1 \quad (2)$$

$$A_{21} \bar x_1 + A_{22} \bar x_2 = b_2 \quad (3)$$

$$\bar x_1 \geq 0 \quad (4)$$

Нет решений:
Либо множество доп. решений, но ф-ал не огр.
Либо ф-л огр, но

Теорема двойственности

Задача л. п. (1)-(4) имеет решение <=>

<=> имеет решение з. л.п.

$$\bar b_1 \bar u_1 + \bar b_2 \bar u_2 \to \min \quad (5)$$

$$A_{11}^* \bar u_1 + A_{21}^* \bar u_2 \geq \bar c_1 \quad (6)$$

$$A_{12}^* \bar u_1 + A_{22}^* \bar u_2 = c_2 \quad (7)$$

$$\bar u_1 \geq 0 \quad (8)$$

Причем, если решение (1)-(4) существует, то оптимальные значения ф-лов в з. л. п. (1)-(4) и (5)-(8) равны

Д-во:

$$(а) \begin{cases} \vec c \vec x \to \max \\ A \bar x \leq \bar b \end{cases}$$

$$(б) \begin{cases} b \bar u \to \min \\ A^* \bar u = \bar C \\ \bar u \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2 \to \max \\ A_{11} \bar x_1 + A_{12} \bar x_2 \leq \bar b_1 \\ A_{21} \bar x_1 + A_{22} \bar x_2 \leq \bar b_2 \\ -A_{21} \bar x_1 - A_{22} \bar x_2 \leq -\bar b_2 \\ -\bar x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\bar c = (\bar c_1, \bar c_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ -E & \underset{n_1 \times n_2}{\Theta} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & -A_{21}^* & E \\ A_{12}^* & A_{22}^* & -A_{22}^* & \underset{n_2 \times n_1}{\Theta} \end{pmatrix}$$

$$\bar b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n_1$$

$\bar u = (\bar y_1, \bar y_2, \bar y_3, \bar y_4)$

тут ещё y_i и

$\bar y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\bar y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$\bar y_3 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $\bar y_4 \in \mathbb{R}^{n_1}$

$$\begin{cases} \bar b_1 \bar y_1 + \bar b_2 \bar y_1 - \bar b_2 \bar y_3 \to \min \\ A_{11}^* \bar y_1 + A_{21}^* y_2 - A_{21}^* y_3 - y_4 = \bar c_1 \\ A_{12}^* y_1 + A_{22}^* y_2 - A_{22}^* y_3 = \bar c_2 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \quad y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Введём

$\bar u_1 = \bar y_1$

$\bar u_2 = \bar y_2 - \bar y_3$

$\Rightarrow$ если все заменить получим (5) - (8)

$$\bar y_4 = A_{11}^* \bar y_1 + A_{21}^* \bar y_2 - A_{21}^* y_3 - \bar c_1 \geq 0$$

Предложение 1

Пусть $(\bar x_1, \bar x_2)$ удовлетворяют (2) - (4),

а $(\bar u_1, \bar u_2)$ удовл. (6) - (8)

тогда:

$$\bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2 \leq \bar b_1 \bar u_1 + \bar b_2 \bar u_2$$

Д-во:

т.к. тут $\bar u_1 \geq 0$, то можем заменить

$$(\bar b_1, \bar u_1) + (\bar b_2, \bar u_2) \geq (A_{11} x_1 + A_{12} x_2, \bar u_1) + (A_{21} \bar x_1 + A_{22} \bar x_2, \bar u_2) =$$

$$= (\bar x_1, A_{11}^* \bar u_1 + A_{12}^* \bar u_2) + (\bar x_2, A_{21}^* \bar u_1 + A_{22}^* \bar u_2) \geq (\bar c_1, \bar x_1) + (\bar c_2, \bar x_2)$$

Следствие

Пусть $(\bar x_1, \bar x_2)$ удовл (2) - (4), а $(\bar u_1, \bar u_2)$ удовл. огр. (6) - (8).
Для того, чтобы $(\bar x_1, \bar x_2)$ было решением (опт.) з. л. п. (1) - (4) и пара $(\bar u_1, \bar u_2)$ была решением двойств. задачи (5) - (8)

НиД

$$\bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2 = \bar b_1 \bar u_1 + \bar b_2 \bar u_2$$

(x_1, x_2) удовл. (2) - (4)

из предложения 1: $\bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2 \leq \bar b_1 \bar u_1 + \bar b_2 \bar u_2 \leq \bar c_1 \bar x_1 + \bar c_2 \bar x_2$

Критерий оптимальности

Пусть $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ удовл. (2) -(4), а $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ удовл. (6) -(8).

Для того, чтобы $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ было решением з. л. п. (1) -(4) и $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ было решением ЗЛП (5)- (8)

Н и Д
$$(\bar{u}_1, \bar{b}_1 - A_{11}\bar{x}_1 - A_{12}\bar{x}_2) = 0 \quad (9)$$

$$(\bar{x}_1, \bar{c}_1 - A_{11}^*\bar{u}_1 - A_{21}^*\bar{u}_2) = 0 \quad (10)$$

Усл. доп. нежесткости

(=) жестко

(>) нежестко

def

Функцией Лагранжа з. л. п. (1) -(4) наз. ф-ия $(x_1, x_2, u_1, u_2) = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}_+^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$

$$\mathcal{L}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = \bar{c}_1\bar{x}_1 + \bar{c}_2\bar{x}_2 + (\bar{u}_1, \bar{b}_1 - A_{12}\bar{x}_1 - A_{12}\bar{x}_2) + (\bar{u}_2, \bar{b}_2 - A_{21}\bar{x}_1 - A_{22}\bar{x}_2) =$$

(правило по знакам: слагаемые, добавляемые в задачи на max ≥ 0, а на min ≤ 0 (для условий неравенство)

Если у прямой задачи x_2 не огр. знака, то огр. типа (=)

с знакоогр. x_1 по правилу

$$= \bar{b}_1\bar{u}_1 + \bar{b}_2\bar{u}_2 + (\bar{x}_1, \bar{c}_1 - A_{11}^* u_1 - A_{21}^* u_2) + (\bar{x}_2, \bar{c}_2 - A_{12}^*\bar{u}_1 - A_{22}^*\bar{u}_2)$$

§ 2. Экономическая интерпр. двойственности: трудовая теория стоимости и её критика

Канторович: сопряженные переменные есть стоимости

Пример 1: (колониальная экономика)

$\bar{x} - A\bar{x} = \bar{w}$ $\quad A \geq 0$ - продуктивная матрица $\quad$ (можно получить $\forall x$)

Отсутствует импорт: $\bar{x} \geq 0, \bar{w} \geq 0$

Распределение ресурса - неквалифицированный труд (люди из сел)

R - предложение труда $\quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \geq 0$

Вектор трудоемкости (человеко-часы)

$$\begin{cases} \vec{\pi} \cdot \bar{w} \to \max \\ \bar{x} - A\bar{x} = \bar{w} \ \} \ \bar{p} \\ \bar{c}\bar{x} \leq R \ \} \ \bar{s} \geq 0 \\ \cancel{\bar{x} \geq 0} \quad \bar{w} \geq 0 \end{cases}$$

(A тут уже не $\forall x$)

$\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n) \geq 0$ ← цены на мировом рынке

$$L(\bar{x}_1, \bar{w}, \bar{p}, \bar{s}) = \vec{\pi} \cdot \bar{w} + (\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w) + s(R - \bar{c}\bar{x}) =$$

$$= sR + (\bar{x}, \bar{p} - A^*p - s\bar{c}) + (\bar{w}, \bar{\pi} - p)$$

т.к. A - прод. $\Rightarrow \bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{w}$, $(E-A)^{-1} \geq 0$ — доказали в 1 главе ☒

$$\begin{cases} sR \to \min \\ \boxed{\bar{p} - A^*\bar{p} - s\bar{c} = 0} \\ \bar{p} - \bar{\pi} \geq 0 \\ \bar{s} \geq 0 \end{cases}$$

Из т. дв-ти: $\pi w = sR$ (1)

$s(R - cx) = 0$ (2) ← Внутри цены не меньше, чем в мире

$(w, \pi - p) = 0$ (3)

$p - A^*p - sc = 0 \Rightarrow$
$p = s(E - A^*)^{-1}c$

$\hat{c} = (E - A^*)^{-1}\bar{c} \overset{\text{по т.3 (о ряде Неймана)}}{=} \hat{c} + A^*\bar{c} + (A^*)^2\bar{c} + \dots + (A^*)^k\bar{c} + \dots$

$\bar{c}$ - ВЕКТОР ПОЛНОЙ ТРУДОЕМКОСТИ $\qquad \dfrac{p_i}{p_j} = \dfrac{\hat{c}_i}{\hat{c}_j}$

$\vec{p}$ - вектор цен

s - ставка зарплаты

ММЭ

23.10.19

Лист

Трудовая теория стоимости

Пример 1 „Колониальная экономика“

$$\begin{cases} \bar\pi \bar w \Rightarrow \max \\ \bar x = A\bar x + \bar w \mid \bar p \\ \bar c \bar x \le \bar R \mid s \ge 0 \\ \bar w \ge 0 \end{cases}$$

$A \ge 0$ - продуктивная матрица

$$\begin{cases} Rs \to \min \\ \bar p = A^* \bar p + s\bar c \\ \bar p \ge \bar \pi \\ \bar s \ge 0 \end{cases}$$

$\bar\pi \bar w = sR$ (1) ← Th двойственности

$s(R - \bar c \bar x) = 0$ (2)

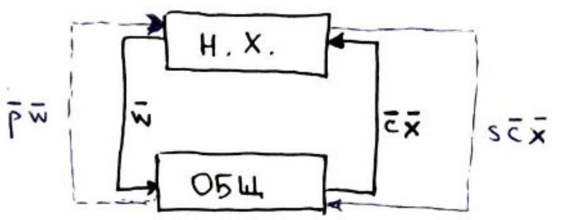
$(\bar w, \bar\pi - \bar p) = 0$ (3)

(2), (3) ← усл. доп. нежестк.

$$\bar p = s\hat{\bar c}$$

$$\hat{\bar c} = (E - A^*)^{-1}\bar c = \bar c + A^*\bar c + \ldots + (A^*)^k \bar c + \ldots$$ ← Вектор полных трудоемкостей

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\hat c_i}{\hat c_j}$$



Основной финансовый баланс Н.Х.:

$$\bar p \bar w \overset{(3)}{=} \bar\pi \bar w \overset{(1)}{=} sR \overset{(2)}{=} s\bar c \bar x$$

$$s\hat{\bar c} \ge \bar\pi \iff s \ge \frac{\pi_j}{\hat c_j} \quad (j = \overline{1,n}) \qquad s = \max_j \frac{\pi_j}{c_j}$$ „Специализация производства“

Пример 2 „Доиндустриальный капитализм“

$$\begin{cases} U(\bar w) \to \max \\ \bar x = A\bar x + \bar w \mid \bar p \\ \bar c \bar x \le R \mid s \ge 0 \\ \bar w \ge 0 \end{cases}$$

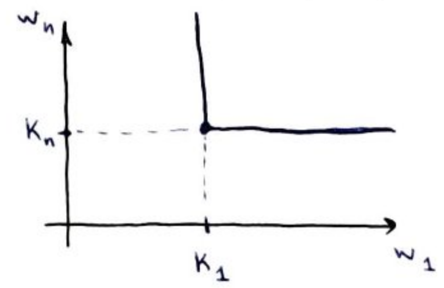
$A \ge 0$ - продуктивная

$U(\bar w)$ - вогнутая, непрерывная, монотонная, полож. одนор.

Товары потребительские не заменяемы

$\bar k = (k_1, \ldots, k_n) > 0$ ← Вектор структуры потребительского комплекта

$$U(w) = \min_{1 \le j \le n} \frac{w_j}{k_j}$$



Аналогия с з/п:

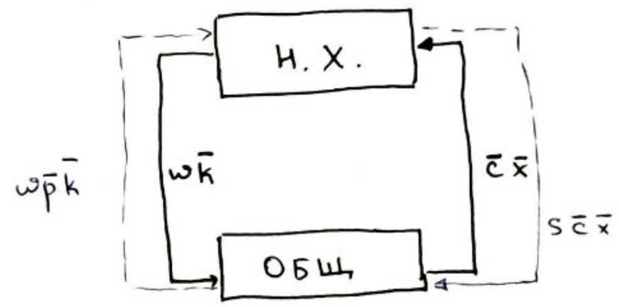
число

$$\begin{cases} \pi w \to \max \\ \bar{x} = A\bar{x} + \bar{w} \\ \bar{c}\bar{x} \le R \\ \bar{w} \ge w\bar{K} \\ w \ge 0 \end{cases} \quad \overset{\text{экв.}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \pi w \to \max \\ \bar{x} - A\bar{x} \ge w\bar{K} \;\}\; \bar{p} \ge 0 \\ \bar{c}\bar{x} \le \bar{R} \;\}\; s \ge 0 \\ w \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\bar{x}, w, \bar{p}, s) = \pi w + (\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{K}) + s(R - \bar{c}\bar{x}) =$$

$$= sR + (\bar{x}, \bar{p} - A^*\bar{p} - s\bar{c}) + w(\pi - \bar{p}\bar{k})$$

$$\begin{cases} sR \to \min \\ \bar{p} = A^* p + s\bar{c} \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = s\hat{\bar{c}} \\ \bar{p}\bar{k} \ge \pi \\ \bar{p} \ge 0, \; s \ge 0 \end{cases}$$



$\pi w = sR \quad (1')$

$s(R - \bar{c}\bar{x}) = 0 \quad (2)$

$(\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{k}) = 0$

$w(\pi - \bar{p}\bar{k}) = 0 \quad (3')$

Основной фин. баланс Н.Х.:

$$w\bar{p}\bar{k} \overset{(3')}{=} \pi w \overset{(1')}{=} sR \overset{(2)}{=} s\bar{c}\bar{x}$$

Пример 3 „Индустриализация"

$$\begin{cases} \pi w \to \max \\ \bar{x} - A\bar{x} \ge w\bar{k} \;\}\; \bar{p} \ge 0 \\ \bar{c}\bar{x} \le R \;\}\; s \ge 0 \\ \bar{b}\bar{x} \le \Phi \;\}\; \tau \ge 0 \\ w \ge 0 \end{cases}$$

цены ($\bar{p}$); ставка з/п (s); аренда фондов (з/п инженера) (τ)

$\bar{b} = (b_1, \dots, b_n) > 0$ — вектор фондоемкости

Φ — трудовые фонды (производственные)

$$\mathcal{L}(\bar{x}, w, \bar{p}, s, \tau) = \pi w + (\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{K}) + s(R - \bar{c}\bar{x}) + \tau(\Phi - \bar{b}\bar{x}) =$$

$$= sR + \tau\Phi + (\bar{x}, \bar{p} - A^*\bar{p} - s\bar{c} - \tau\bar{b}) + w(\pi - \bar{p}\bar{k})$$

$$\begin{cases} sR + \tau\Phi \to \min \\ \bar{p} = A^*\bar{p} + s\bar{c} + \tau\bar{b} \\ \bar{p}\bar{k} \ge \pi \\ \bar{p} \ge 0, \; s \ge 0, \; \tau \ge 0 \end{cases}$$

$\pi w = sR + \tau\Phi \quad (1'')$

$(\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{k}) = 0$

$s(R - \bar{c}\bar{x}) = 0 \quad (2)$

$w(\pi - \bar{p}\bar{k}) = 0 \quad (3)$

$\tau(\Phi - \bar{b}\bar{x}) = 0 \quad (4)$

ММ7

23.10.19

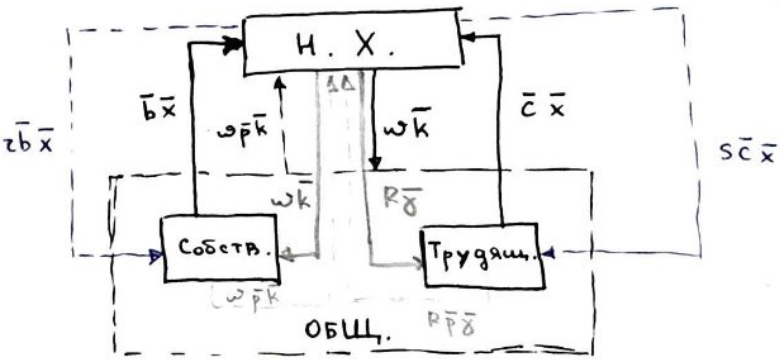
Лист

$\bar{p} = s\hat{c} + r\hat{b}$ тут уже трудовая теория стоимости не работает ($\bar{p} \neq \hat{c}$)

$\hat{c}$

$\hat{b} = (E - A^*)^{-1}\bar{b} = \bar{b} + A^*\bar{b} + \ldots + (A^*)^k\bar{b} + \ldots$ $\quad \hat{b} \leftarrow$ вектор полных фондоемкостей

Борьба классовая из-за неявного деления $\omega\bar{k}$ θ между частями общ.



для Инд. кап. (пример 4)

Основной финансовый баланс Н.Х.:

$$\omega\bar{p}\bar{k} = \pi\omega \overset{(1'')}{=} sR + r\Phi \overset{(2),(4)}{=} s\bar{c}\,\bar{x} + r\bar{b}\bar{x}$$

сбой вот здесь

Пример 4 „Индустриальный капитализм" Собственники создали рынок труда

$$\begin{cases} \pi\omega \to \max \\ \bar{x} - A\bar{x} \geq \omega\bar{k} + R\bar{\gamma} \; \} \; \bar{p} \geq 0 \\ \bar{c}\,\bar{x} \leq R \; \} \; s \geq 0 \\ \bar{b}\,\bar{x} \leq \Phi \; \} \; r \geq 0 \\ \omega \geq 0, R \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n) > 0$ - структ. потр. собств.

$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ - структура потр. трудящихся

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \omega, R, \bar{p}, s, r) = \pi\omega + (\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - \omega\bar{k} - R\bar{\gamma}) + s(R - \bar{c}\,\bar{x}) + r(\Phi - \bar{b}\bar{x}) = r\Phi + (\bar{x}, \bar{p} - A^*\bar{p} - s\bar{c} - r\bar{b}) + \omega(\pi - \bar{p}\bar{k}) + R(s - \bar{p}\bar{\gamma})$$

$$\begin{cases} r\Phi \to \min \\ \bar{p} = A^*p + s\bar{c} + r\bar{b} \\ \bar{p}\bar{k} \geq \pi \\ \bar{p}\bar{\gamma} \geq s \\ \cancel{\bar{p}} \geq 0, s \geq 0, r \geq 0 \end{cases}$$

$\pi w = r\Phi \quad (1''')$

$(\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - \omega\bar{k} - R\bar{\gamma}) = 0$

$s(R - \bar{c}\,\bar{x}) = 0 \quad (2)$

$\omega(\pi - \bar{p}\bar{k}) = 0 \quad (3')$

$r(\Phi - \bar{b}\bar{x}) = 0 \quad (4)$

$R(s - \bar{p}\bar{\gamma}) = 0 \quad (5)$

Основной фин. баланс К.Х:

$$\omega \bar{p}\bar{k} + R\bar{p}\bar{\gamma} \overset{(3'),(5)}{=} \pi\omega + Rs \overset{(1'''),(2)}{=} r\Phi + s\bar{c}\bar{x} = r\bar{b}\bar{x} + s\bar{c}\bar{x}$$

Баланс доходов и расх. трудящихся

$$s\bar{c}\bar{x} \overset{(2)}{=} sR \overset{(5)}{=} R\bar{p}\bar{\gamma}$$

Баланс дох. и расх. собственников

$$r\bar{b}\bar{x} \overset{(4)}{=} r\Phi \overset{(1''')}{=} \pi\omega \overset{(3')}{=} \omega\bar{p}\bar{k}$$

Будет ли такая с-ма эконом. продуктивна?

$R > 0$

$(5) \Rightarrow \quad s = \bar{p}\bar{\gamma}$ подставим цены:

$$s = s(\hat{c}, \bar{\gamma}) + r(\hat{b}, \bar{\gamma})$$

мы нанимаем

сколько „стоит" обеспечить ему потр. пакет

$$r = s\,\frac{1-(\hat{c},\bar{\gamma})}{(\bar{b},\bar{\gamma})} \qquad r \overset{?}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 \geq (\hat{c}, \bar{\gamma})}$$

1 ед. труда

Размер этого потр. пакета опр. переговоры собств. и профсоюзов

$$\boxed{\bar{p} = s\left(\hat{c} + \frac{1-(\hat{c},\bar{\gamma})}{(\bar{b},\bar{\gamma})}\hat{b}\right)}$$

ММЭ

23.10.19

Лист

<u>Пример 5</u> „Неоколониализм"

Элита не хочет жить, как сложилось, поэтому импорт/экспорт

$$\begin{cases} \bar{\pi}\,\bar{w} \to \max \\ \bar{x} - A\bar{x} = \bar{w} + R\bar{\gamma} \\ \bar{c}\bar{x} \leq R \\ \bar{b}\bar{x} \leq \Phi \\ \bar{w} \geq 0,\ R \geq 0,\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

§3. Декомпозиционные свойства множителей Лагранжа

30.10.19

Пусть есть **M** регионов, $t = \overline{1,M}$ - индекс

Свободное перемещение ресурса (трудового)

возможность лоббировать свои потр.

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{M} \pi(t)\,w(t) \to \max \\ \bar{x}(t) \geq A(t)\,\bar{x}(t) + w(t)\bar{k}(t) & t=\overline{1,M} \ \{\ \bar{p}(t) \geq 0 \\ \bar{b}(t)\,\bar{x}(t) \leq \Phi(t) & t = \overline{1,M} \ \{\ z(t) \geq 0 \\ \sum\limits_{t=1}^{M} \bar{c}(t)\,\bar{x}(t) \leq R & \{\ s \geq 0 \\ w(t) \geq 0 \\ A(t) \geq 0 \text{ - продуктивная матрица} \\ \bar{b}(t) > 0,\ \bar{c}(t) > 0,\ \bar{k}(t) > 0 \end{cases}$$

уровень жизни — $w(t)$; объем пр-ва — $\bar{x}(t)$; цены на товары — $\bar{p}(t)$; фондоёмкость — $\bar{b}(t)$; объем произв. фондов — $\Phi(t)$; аренда фондов (скаляр) — $z(t)$; единая ставка ЗП — s

$$\mathcal{L}(\{\bar{x}(t), w(t), \bar{p}(t), z(t) \mid t=\overline{1,M}\}, s) = \sum_{t=1}^{M}\{\pi(t)w(t) + (\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A(t)\bar{x}(t) - w(t)\bar{k}(t)) + z(t)(\Phi(t) - \bar{b}(t)\bar{x}(t))\} +$$

$$+ s\Big(R - \sum_{t=1}^{M} z(t)\bar{x}(t)\Big) = sR + \sum_{t=1}^{M} z(t)\Phi(t) + \sum_{t=1}^{M}\{(x(t), \bar{p}(t) - A^*(t)\bar{p}(t) - z(t)\bar{b}(t) - s\bar{c}(t)) + w(t)(\pi(t) - (\bar{p}(t), \bar{k}(t))\}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} sR + \sum\limits_{t=1}^{M} z(t)\bar{p}(t) \to \min \\ \bar{p}(t) = A^*(t)\bar{p}(t) + z(t)\bar{b}(t) + s\bar{c}(t) \\ \bar{p}(t)\cdot\bar{k}(t) \geq \pi(t) \\ \bar{p}(t) \geq 0,\ z(t) \geq 0,\ s \geq 0 \end{cases}$$

$$(\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A(t)\bar{x}(t) - w(t)\bar{k}(t)) = 0 \qquad (3_t)$$

$$z(t)\cdot(\Phi(t) - \bar{b}(t)\bar{x}(t)) = 0 \qquad (4_t) \qquad t = \overline{1,M}$$

$$s\Big(R - \sum_{t=1}^{M}\bar{c}(t)\bar{x}(t)\Big) = 0 \qquad (5)$$

$$w(t)(\pi(t) - \bar{p}(t)\bar{k}(t)) = 0 \qquad (6_t)$$

Предложение 2

Пусть $\{\hat{x}(t), \hat{w}(t) \mid t=\overline{1,M}\}$ реш. ЗЛП (I),

$\{\hat{\bar{p}}(t), \hat{z}(t) \mid t=\overline{1,M}\}, \hat{s}$ - реш. ЗЛП(II) $\quad 1 \le \tau \le M$

Тогда

Строим из З.Л.П.(I):

$(\hat{x}(\tau), \hat{w}(\tau))$ явл. реш. ЗЛП (7):

$$\begin{cases} \pi(\tau)w(\tau) - \hat{s}\,\bar{c}(\tau)\,\bar{x}(\tau) \to \max \\ \bar{x}(\tau) \ge A(\tau)\bar{x}(\tau) + w(\tau)k(\tau) \\ \bar{b}(\tau)\bar{x}(\tau) \le \varphi(\tau) \\ w(\tau) \ge 0 \end{cases},$$

а $(\hat{\bar{p}}(\tau), \hat{z}(\tau))$ явл. реш. ЗЛП (8):

$$\begin{cases} z(\tau)\varphi(\tau) \to \min \\ \bar{p}(\tau) = A^*(\tau)\bar{p}(\tau) + z(\tau)\bar{b}(\tau) + \hat{s}\,c(\tau) \\ \bar{p}(\tau)\,\bar{k}(\tau) \ge \pi(\tau) \\ \bar{p}(\tau) \ge 0, \; z(\tau) \ge 0 \end{cases}$$

$\hat{s}$ - ставка ЗП на рынке труда,

заключает в себе инф. обо всем (не только по поводу текущего региона) (мы можем с этим не угадать)

Д-во:

(8) дв-ная к (7)

$$\mathcal{L}(\bar{x}(\tau), w(\tau), \bar{p}(\tau), z(\tau)) = \pi(\tau)w(\tau) - \hat{s}\,\bar{c}(\tau)\bar{x}(\tau) + (\bar{p}(\tau), \bar{x}(\tau) - A(\tau)\bar{x}(\tau) - w(\tau)\bar{k}(\tau)) +$$

$$+ z(\tau)(\varphi(\tau) - \bar{b}(\tau)\bar{x}(\tau)) = z(\tau)\varphi(\tau) + (\bar{x}(\tau), \bar{p}(\tau) - A^*(\tau)\bar{p}(\tau) - z(\tau)\bar{b}(\tau) - \hat{s}\,\bar{c}(\tau)) +$$

$$+ w(\tau)(\pi(\tau) - \bar{p}(\tau)\bar{k}(\tau))$$

Ссылка на кр. опт. в виде доп. нежесткости

$\square$

Возникают проблемы с неединств. решения.

Это связано с (спроси у Вари)

§ 4. Оценка эффективности новых технологий

Маркс в социализме этого не учитывал

Будем считать, что $n \neq m$

n - число продуктов

m - технологий

$\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ - вектор интенсивности исп. технологии

$G\bar{x}$ - вектор объемов пр-ва

$G \geq 0$ - матр. $(n \times m)$ выпусков

$A \geq 0$ - матрица $(n \times m)$ прямых затрат

$A\bar{x}$ - вектор произв. затрат

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \pi w \to \max \\ G\bar{x} \geq A\bar{x} + w\bar{k} & | p \geq 0 \\ \bar{b}\bar{x} \leq \Phi & | z \geq 0 \\ \bar{c}\bar{x} \leq R & | s \geq 0 \\ w \geq 0,\ \underbrace{\bar{x} \geq 0} \end{cases}$$

↑ нет продуктивности => надо то указать

$(\bar{g}_н, \underset{\text{вектор затрат}}{\bar{a}_н}, b_н, \bar{c}_н)$ ← описание новой технологии

$x_н$ - интенс. исп. новой технологии

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \pi w \to \max \\ G\bar{x} + x_н\bar{g}_н \geq A\bar{x} + \bar{x}_н\bar{a}_н + w\bar{k} \\ \bar{b}\bar{x} + \bar{b}_н x_н \leq \Phi \\ \bar{c}\bar{x} + c_н x_н \leq R \\ w \geq 0,\ \bar{x} \geq 0,\ x_н \geq 0 \end{cases}$$

def

Будем говорить, что новая технология $(\bar{g}_н, \bar{a}_н, b_н, c_н)$ не эфф., если опт. значения функционалов в ЗЛП(I) и ЗЛП(II) равны

$$\mathcal{L}(\bar x, w, \bar p, r, s) = \pi w + (\bar p,\ G\bar x - Ax - w\bar k) + r(\Phi - \bar b \bar x) + s(R - \bar c \bar x) =$$

$$= r\Phi + sR + (\bar x,\ G^{*}\bar p - A^{*}\bar p - r\bar b + s\bar c) + w(\pi - \bar p \bar k)$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} r\Phi + sR \to \min \\ G^{*}\bar p \le A^{*}\bar p + r\bar b + s\bar c \\ \bar p \bar k \ge \pi \\ \bar p \ge 0,\ r \ge 0,\ s \ge 0 \end{cases}$$

<u>Предложение 3</u>

Для того, чтобы новая технология $(\bar g_н, \bar a_н, b_н, c_н)$ была неэффективна

НиД чтобы существовало реш. (p, r, s) дв-ой з.л.п (III):

$$\underbrace{\bar p \bar g_н}_{\text{стоимость выпускаемой продукции}} \le \underbrace{\bar p a_н + r b_н + s c_н}_{\text{затраты}} \quad (4)$$

(тут интенс. = 1, иначе домножим на $x_н$)

Вышло, что мы новую техн. оцен. по <u>старым</u> ценам (иногда это не очень хорошо: Фарадей)

<u>Д-во:</u>

$$(\mathrm{V}) \begin{cases} r\Phi + sR \to \min \\ G^{*}p \le A^{*}p + r\bar b + s\bar c \\ \bar p \bar k \ge \pi \\ \bar p \ge 0,\ r \ge 0,\ s \ge 0 \\ g_н \bar p \le \bar p a_н + r b_н + s c_н \end{cases}$$

По т. дв-ти ЗЛП (I) равно опт. зн. ф-ла (III) (опт. зн. ф-ла)

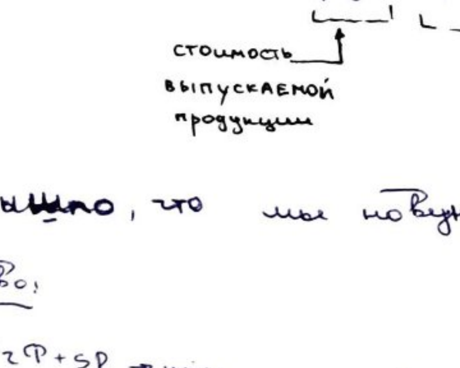
$$(\mathrm{II}) \overset{\text{т. ДВ}}{=\!=} (\mathrm{IV})$$

Эффективно, если $(\mathrm{I}) = (\mathrm{II}) \to (\mathrm{III}) = (\mathrm{V})$

□

<u>Замечание:</u>

Решения задач - многогр. или пересеч. полупр-ств



§5. Теорема о магистрали

$$(I)\begin{cases} \bar{c}\,\bar{x}(T) \to \max & t=\overline{0,T} \\ A\bar{x}(t+1) \leqslant \bar{x}(t) & t=\overline{0,T-1} \quad \bar{c}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\Theta\},\ \bar{x}_0>0, T \\ \bar{x}(0)=\bar{x}_0 & \bar{x}(t)\geqslant 0 \quad (t=\overline{1,T}) \end{cases}$$

Экономики типа Китая

A – fix

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \left\| \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} - \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right\|$$

$\bar{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\Theta\}$, $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\Theta\}$

Свойства квазиметрики:

1) $\rho(\bar{x},\bar{y}) = \rho(\bar{y},\bar{x})$

2) $\rho(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \rho(\bar{x},\bar{z}) + \rho(\bar{z},\bar{y})$

3) $\rho(\bar{x},\bar{y}) = 0 \iff \exists\lambda : \bar{y}=\lambda\bar{x}$

4) $\forall \lambda>0, \mu>0$

$\rho(\lambda x, \mu y) = \rho(\bar{x},\bar{y})$

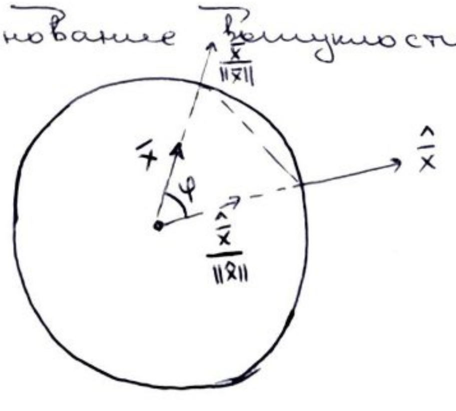
5) если $\lim\limits_{t\to+\infty} \bar{x}(t) = \tilde{\bar{x}} \neq 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \bar{y}(t) = \tilde{\bar{y}} \neq 0$, то

$\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(\bar{x}(t),\bar{y}(t)) = \rho(\tilde{\bar{x}},\tilde{\bar{y}})$

6) $0<\varepsilon<\sqrt{2}$ $\quad \Gamma_\varepsilon(\hat{\bar{x}}) = \{\bar{x} \mid \rho(\bar{x},\hat{\bar{x}})<\varepsilon\}$

Тогда $\Gamma_\varepsilon(\bar{x})$ - выпуклый конус.

Обоснование выпуклости



$\tilde{\varepsilon} = 2\sin\frac{\varphi}{2} \qquad \cos\varphi = 1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2}$

$(\bar{x},\hat{\bar{x}}) \geqslant \left(1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2}\right)\|\bar{x}\|\,\|\hat{\bar{x}}\| \iff \rho(\bar{x},\hat{\bar{x}})<\varepsilon$

$\bar{x}\in\Gamma_\varepsilon(\hat{\bar{x}}) \iff (\bar{x},\hat{\bar{x}}) \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\|\bar{x}\|\,\|\hat{\bar{x}}\|$

$\bar{y}\in\Gamma_\varepsilon(\hat{\bar{y}}) \iff (y,\hat{\bar{x}}) \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\|\bar{y}\|\,\|\hat{\bar{x}}\|$ $\quad +$

$(\bar{x}+\bar{y},\hat{\bar{x}}) \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\|\bar{x}+\bar{y}\|\,\|\hat{\bar{x}}\| \iff \bar{x}+\bar{y}\in\Gamma_\varepsilon(\hat{\bar{x}})$

def (Самуэлсон, Дорфман , Солоу)

Будем говорить, что вектор $\hat{\bar{x}} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\Theta\}$ является магистралью семейства экстр. задач (I), если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_1(\varepsilon, A) > 0, \tau_2(\varepsilon, A) > 0 :$ решение $\{\bar{x}(t) \mid t = \overline{1,T}\}$ удовл. при

(не зависят от задачи I: от $\bar{c}$, x_0, T)

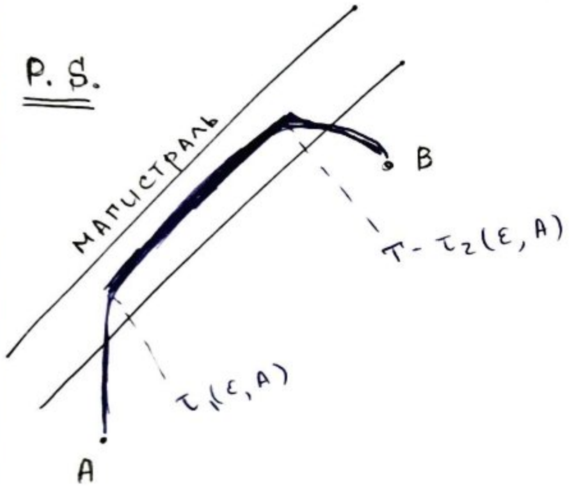
$\tau_1(\varepsilon, A) \leq t \leq T - \tau_2(\varepsilon, A)$

нер-ву:

$$\rho(\bar{x}(t), \hat{\bar{x}}) \leq \varepsilon$$

магистраль.

P. S.



Теорема (Морешимы)

Пусть A - устойчивая матрица и $\bar{x}_A$ - вектор ФП матрицы A. Тогда $\bar{x}_A$ является магистралью для семейства экстр. задач (I).

Теорема об устойчивых матрицах.

Пусть $A \geq 0$ устойчивая. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\Theta\} \ \exists \tau(\varepsilon, \bar{y}_0, A)$:

$\forall t \geq \tau(\varepsilon, \bar{y}_0, A)$, то $\rho(A^t \bar{y}_0, \bar{x}_A) < \varepsilon$, где $\bar{x}_A$ — вектор ФП

ММЭ
6.11.19
лист

Лемма 1

Пусть $A \geqslant 0$ уст. матрица и $\bar{x}_A$ - вектор ФП A.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau(\varepsilon, A) > 0 : \forall \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\Theta\}$

справедливо при $t \geqslant \tau(\varepsilon, A)$ нер-во:

Д-во:

$$\bar{y}_0 = \sum_{j=1}^{n} [\bar{y}_0]_j \, \bar{e}_j \qquad \bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \qquad [y_0]_j \geqslant 0 \quad j = \overline{1,n}$$

$$A^t y_0 = \sum_{j=1}^{n} [\bar{y}_0]_j \, A^t \bar{e}_j \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau(\varepsilon, e_j, A) \geqslant 0 : \text{ при } t \geqslant \tau(\varepsilon, e_j, A)$$

$$\rho(A^t \bar{e}_j, \bar{x}_A) < \varepsilon \iff A^t \bar{e}_j \in \Gamma_\varepsilon(\bar{x}_A)$$

Положим $\tau(\varepsilon, A) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \tau(\varepsilon, \bar{e}_j, A) \geqslant 0$ при $t \geqslant \tau(\varepsilon, A) \geqslant \tau(\varepsilon, e_j, A)$

$A^t \bar{e}_j \in \Gamma_\varepsilon(\bar{x}_A) \quad j = \overline{1,n}$

Если $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$, то $\Gamma_\varepsilon(\bar{x}_A)$ - - вып. конус и $A^t \bar{y}_0 \in \Gamma_\varepsilon(\bar{x}_A) \iff$

$\iff \rho(A^t \bar{y}_0, \bar{x}_A) < \varepsilon$

$\blacksquare$

Следствие:

Пусть $A \geqslant 0$ устойчивая матрица и $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}$.

Тогда $\exists \tau(A) > 0 : \forall t \geqslant \tau(A)$ верно $A^t y_0 > 0$

Д-во:

По т. 4 (п. 1) $\bar{x}_A > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall x \in \Gamma_{\varepsilon_0}(\bar{x}_A)$ справедливо, что $\bar{x} > 0$

Положим $\tau(A) = \tau(\varepsilon, A)$. По лемме 1 при $t \geqslant \tau(\varepsilon_0, A) = \tau(A)$

$$\rho(A^t y_0, \bar{x}_A) < \varepsilon_0 \Rightarrow A^t \bar{y}_0 > 0$$

$\blacksquare$

Лемма 2

Пусть $A \geq 0$ - уст. матрица и $\{\bar{x}(t) \mid t = 1, 2, \dots, T\}$ решение экстр. задачи из семейства (I). Тогда $\bar{c}\,\bar{x}(T) > 0$

Д-во:

$$\tilde{\bar{x}}(t) = \beta \lambda(A)^{-t} \bar{x}_A \qquad \beta > 0$$

$$A \tilde{\bar{x}}(t+1) = \beta \lambda(A)^{-t-1} A \bar{x}_A = \beta \lambda(A)^{-t-1} \lambda(A) \bar{x}_A = \tilde{\bar{x}}(t) \qquad t = \overline{1, T-1}$$

$$\bar{x}_0 \geq A \tilde{\bar{x}}(1) = \beta \lambda^{-1}(A) A \bar{x}_A = \beta \bar{x}_A .$$

$$\beta = \min_{j = \overline{1,n}} \frac{[\bar{x}_0]_j}{[\bar{x}_A]_j} > 0$$

$$(\bar{c}, \tilde{\bar{x}}(T)) = \underset{0}{\underset{\vee}{\beta}} \underset{0}{\underset{\vee}{\lambda(A)}}^{-T} (\bar{c}, \bar{x}_A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}\,\bar{x}(T) \geq \bar{c}\,\tilde{\bar{x}}(T) > 0$$

■

Составим задачу, двойств. к (I):

$$\mathcal{L}(\{\bar{x}(t) \mid t = \overline{1,T}\}, \{\bar{p}(t) \mid t = \overline{0,T}\}) = \bar{c}\,\bar{x}(T) + \sum_{t=1}^{T-1} \left(\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A\bar{x}(t+1)\right) +$$

$$+ (\bar{p}(0), \bar{x}_0 - A\bar{x}(1)) = \bar{p}(0)\bar{x}_0 + \sum_{t=1}^{T-1} (\bar{x}(t), \bar{p}(t) - A^* \bar{p}(t-1)) + (\bar{x}(T), \bar{c} - A^* \bar{p}(T-1))$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \bar{p}(0)\bar{x}_0 \to \min \\ \bar{p}(t) \leq A^* \bar{p}(t-1) & t = \overline{1, T-1} \\ \bar{c} \leq A^* \bar{p}(T-1) \\ \bar{p}(t) \geq 0 & t = \overline{0, T-1} \end{cases}$$

$$(p(0), \bar{x}_0 - A\bar{x}(1)) = 0$$

$$(\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A\bar{x}(t+1)) = 0 \quad (3_t)$$

$$(\bar{x}(t), \bar{p}(t) - A^* \bar{p}(t-1)) = 0 \quad (4_t)$$

$$(\bar{x}(T), \bar{c} - A^* \bar{p}(t-1)) = 0$$

Д-во т. Моришимы

ММЭ
5.11.19
Лист

1) $A\bar{x}(T) \le \bar{x}(T-1)$

$A^{\theta}\bar{x}(T) \le \bar{x}(T-\theta)$ $\quad \theta = \overline{1, T-1}$

$A^{\theta-1}\bar{x}(T) \le A\,\bar{x}(T-\theta) \le \bar{x}(T-\theta-1)$

По лемме 2 $\bar{x}(T) \geq 0$ $\bar{x}(T)\neq 0$, поэтому в силу следствия при $\theta \geq \tau(A)$ $\quad A^{\theta}\bar{x}(T) > 0$

$\bar{x}(T-\theta) > 0$

Если $1 \le t \le T-\tau(A)$, то $\bar{x}(t) > 0$

2) В силу (4_t) при $t = \overline{1, T-\tau(A)}$ $\quad \bar{p}(t) = A^{*}\bar{p}(t-1)$ $\quad t = \overline{1, T-\tau(A)}$

По т. двойственности $\bar{p}(0)\cdot\bar{x}_0 = \bar{c}x(T) \underset{\text{по п.2}}{>} 0 \Rightarrow \bar{p}(0)\neq 0$ $\bar{p}(0)\geq 0 \Rightarrow$

$\bar{p}(t) = (A^{*})^{t}\,\bar{p}(0)$ $\quad t = \overline{1, T-\tau(A)}$

Если A - уст, то A^{*} - тоже уст.

В силу следствия при $\tau(A^{*}) \le t \le T-\tau(A)$ $\quad \bar{p}(t) > 0$

3) В силу (3_t) при $\tau(A^{*}) \le t \le T-\tau(A)$ имеем:

$\bar{x}(t) = A\,\bar{x}(t+1) \Rightarrow$

$\bar{x}(t) = A^{T-\tau(A)-t}\,\bar{x}(T-\tau(A))$ $\quad t = \overline{\tau(A^{*}), T-\tau(A)}$

$\bar{x}(T-\tau(A)) > 0$

По лемме 1 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tau(\varepsilon, A) > 0:$ $\quad T-\tau(A)-t \geq \tau(\varepsilon, A)$

$\tau(A^{*}) \le t \le T-\tau(A)$

$\rho(\bar{x}(t), \bar{x}_A) < \varepsilon$ $\quad$ при $\tau(A^{*}) \le t \le T-\tau(A)-\tau(\varepsilon, A)$

В опр. магистрали $\tau_1(\varepsilon, A) = \tau(A^{*})$

$\tau_2(\varepsilon, A) = \tau(A) + \tau(\varepsilon, A)$

Мы рассматривали сильные теоремы о магистрали.

В слабой форме мы не знаем, где мы выбрасываем кусочки.

§6. Модель Кокса - Росса - Рубинштейна

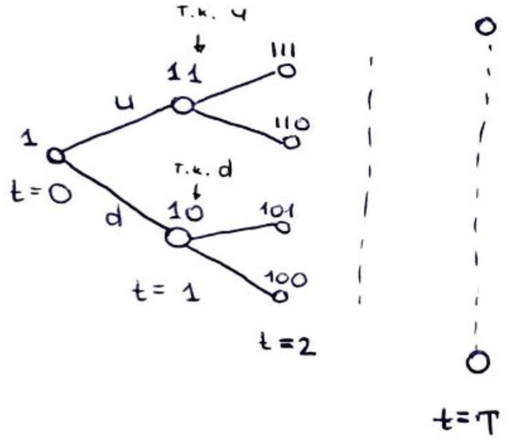
13.11.19

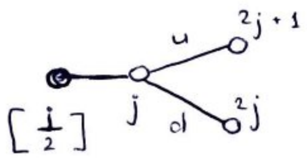
$t = \overline{0, T}$ Есть 2 первичных инструмента - безрисковый актив, и рискованный актив

$(1+\rho)$ - доход с безрискового актива

риск. подешевеет — d, риск. подорожает — u:

$$d < 1 + \rho < u$$





$S_0(j)$ - цена обл. в сост. j

$S_1(j)$ - цена акции в сост. j

$$\frac{S_0(2j)}{S_0(j)} = \frac{S_0(2j+1)}{S_0(j)} = (1+\rho)$$

$$\frac{S_1(2j)}{S_1(j)} = d \qquad \frac{S_1(2j+1)}{S_1(j)} = u$$

По номеру j можем сказать, сколько раз акция умнож. на d - это $k(j)$.

$$\tau(j) = [\log_2 j]$$

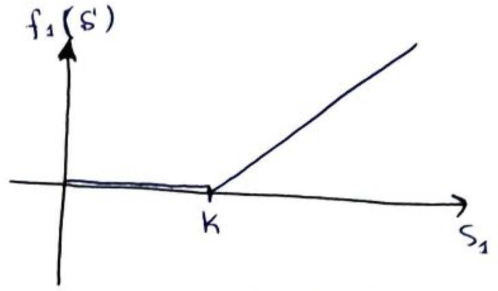
$$S_1(j) = d^{k(j)} u^{\tau(j) - k(j)} \cdot S_1(1)$$

• „Опцион на покупку"

K – страйк

$S \in [d^T \cdot S_1(1);\ u^T \cdot S_1(1)]$

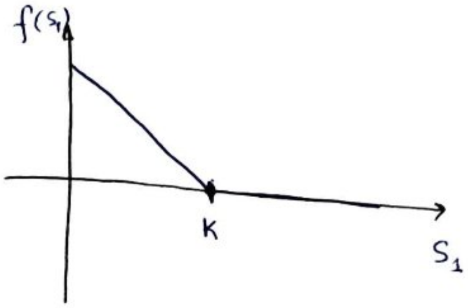
$$f(S_1) = \begin{cases} K - S_1, & \text{если } S_1 \geq K \\ 0, & \text{если } S_1 < K \end{cases}$$



$f(S_1) = (S_1 - K)_+$

• „Опцион на продажу"

$$f(S_1) = \begin{cases} K - S_1, & \text{если } S_1 \leq K \\ 0, & \text{если } S_1 > K \end{cases}$$



$f(S_1) = (K - S_1)_+$

• „опцион стелаж"

$$f(S_1) = |S_1 - K| = (S_1 - K)_+ + (K - S_1)_+$$

Задача о портфеле с первичными фин. инструментами

$\{\underset{\text{кол-во обл.}}{\xi_0(j)}, \underset{\text{акций}}{\xi_1(j)} \mid j = 1, \dots, 2^T - 1\}$ $\quad j = 2^T, \dots, 2^{T+1} - 1$ – терминальные состояния

Условие самофинансирования

усл. самофинансирования

$S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j) = S_0(j)\xi_0([\frac{j}{2}]) + S_1(j)\xi_1([\frac{j}{2}])$ $\quad$ нетерм. сост. $j = 2, \dots, 2^T - 1$

усл. платежеспособности

$S_0(j)\xi_0([\frac{j}{2}]) + S_1(j)\xi_1([\frac{j}{2}]) \geq f(S_1(j))$ $\quad$ терм. сост. $j = 2^T, 2^T + 1, \dots, 2^{T+1} - 1$

Сколько денег нужно, чтобы выполнить обязательства?

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} S_0(1)\xi_0(1) + S_1(1)\xi_1(1) \to \min \\ S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j) \leq S_0(j)\xi_0([\frac{j}{2}]) + S_1(j)\xi_1([\frac{j}{2}]) & j = 2, \dots, 2^T - 1 \\ S_0(j)\xi_0([\frac{j}{2}]) + S_1(j)\xi_1([\frac{j}{2}]) \geq f(S_1(j)) & j = 2^T, \dots, 2^{T+1} - 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\{\zeta_1(j), \zeta_2(j) | j = 1, \ldots, 2^T - 1\}, \{\tilde{p}(j) | j = 2, \ldots, 2^{T+1} - 1\}) =$$

$$= S_0(1)\zeta_0(1) + S_1(1)\zeta_1(1) + \sum_{j=2}^{2^T-1} \tilde{p}(j)\Big(S_0(j)\zeta_0(j) + S_1(j)\zeta_1(j) - S_0(j)\zeta_0([\tfrac{j}{2}]) - S_1(j)\zeta_1([\tfrac{j}{2}])\Big) +$$

$$+ \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j)\Big(f(S_1(j)) - S_0(j)\zeta_0([\tfrac{j}{2}]) - S_1(j)\zeta_1([\tfrac{j}{2}])\Big) =$$

$$= \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(S_1(j)) + \zeta_0(1)\big(S_0(1) - \tilde{p}(2)\cdot S_0(2) - \tilde{p}(3) S_0(3)\big) +$$

$$+ \zeta_1(1)\big(S_1(1) - \tilde{p}(2) S_1(2) - \tilde{p}(3) S_1(3)\big) + \sum_{j=2}^{2^T-1} \{\zeta_0(j)\big(\tilde{p}_0(j)\cdot S_0(j) - \tilde{p}(2j) S_0(2j) - \tilde{p}(2j+1) S_0(2j+1)\big)$$

$$+ \zeta_1(j)\big(\tilde{p}(j) S_1(j) - \tilde{p}(2j)\cdot S_1(2j) - \tilde{p}(2j+1) S_1(2j+1)\big)\} \Rightarrow$$

$$(\text{II})\begin{cases} \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(S_1(j)) \longrightarrow \max \\ \tilde{p}(2) S_0(2) + \tilde{p}(3) S_0(3) = S_0(1) \\ \tilde{p}(2) S_1(2) + \tilde{p}(3) S_1(3) = S_1(1) \\ \tilde{p}(2j) S_0(2j) + \tilde{p}(2j+1) S_0(2j+1) = \tilde{p}(j) S_0(j) \\ \tilde{p}(2j) S_1(2j) + \tilde{p}(2j+1) S_1(2j+1) = \tilde{p}(j) S_1(j) \quad j = 2, 2^T - 1 \\ \tilde{p}(j) \geq 0 \qquad j = 2, \ldots, 2^{T+1} - 1 \end{cases}$$

усл. доп. нежесткости:

$$(3)\quad \tilde{p}(j)\Big(f(S_1(j)) - S_0(j)\cdot\zeta_0([\tfrac{j}{2}]) - S_1(j)\zeta_1([\tfrac{j}{2}])\Big) = 0$$

$$j = 2^T, \ldots, 2^{T+1} - 1$$

Преобразуем через ρ, d, u:

$$(\text{II})\begin{cases} \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(S_1(j)) \to \max \\ \tilde{p}(2)(1+\rho) + \tilde{p}(3)(1+\rho) = 1 \\ \tilde{p}(2) d + \tilde{p}(3) u = 1 \\ \tilde{p}(2j)(1+\rho) + \tilde{p}(2j+1)(1+\rho) = \tilde{p}(j) \\ \tilde{p}(2j)\, d + \tilde{p}(2j+1)\cdot u = \tilde{p}(j) \quad j = 2, \ldots, 2^T - 1 \\ \tilde{p}(j) \geq 0 \qquad j = 2^T, \ldots, 2^{T+1} - 1 \end{cases}
\Rightarrow$$

$$\tilde{p}(2) = \frac{u - (1+\rho)}{(1+\rho)(u-d)} = \frac{1}{1+\rho} p^*$$

$$\tilde{p}(3) = \frac{(1+\rho) - d}{(1+\rho)(u-d)} = \frac{1}{1+\rho}(1 - p^*)$$

$$\tilde{p}(2j) = \frac{u - (1-\rho)}{(1+\rho)(u-d)}\tilde{p}(j) = \frac{1}{1+\rho} p^* \tilde{p}(j)$$

$$\tilde{p}(2j+1) = \frac{(1+\rho) - d}{(1+\rho)(u-d)}\tilde{p}(j) = \frac{1}{1+\rho}(1 - p^*)\tilde{p}(j)$$

$$0 < p^* = \frac{u - (1+\rho)}{u - d} < 1 \leftarrow \text{мартингальный риск}$$

ММ7

лист 13.11.19

Перенормируем: $\tilde{p} = (1+\rho)^{-\tau(j)}\, p(j)$

$$p(j) = (p^*)^{k(j)}(1-p^*)^{\tau(j)-k(j)} \qquad j = 2,\dots,2^{T+1}-1$$

На опт. стратегии инв. приходит в expiry ровно с нужной суммой.

Справедливая цена опциона - значение ф-ла в з. (I)

Утверждение: формула Росса-Кокса-Рубенштейна

Справедливая цена платежного обязательства европейского типа плат. ф-ции $f(S_1)$ равна

$$(1+\rho)^{-T}\sum_{k=0}^{T} C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} f\left(S_1(1)\cdot d^k u^{T-k}\right), \quad p^* = \frac{u-(1+\rho)}{u-d}$$

это $S_1(j)$, а не от $S_1(t)$.

это стоимость в нач. момент

Д-во:

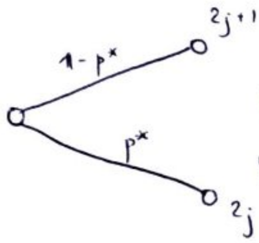
По т. двойственности в з. (I) и в (II) один. знач. ф-ла,

$$\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(S_1(j)) = (1+\rho)^{-T}\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1}(p^*)^{k(j)}\cdot(1-p^*)^{T-k(j)} f\left(S_1(1)\, d^{k(j)} u^{T-k(j)}\right) =$$

$$= (1+\rho)^{-T}\sum_{k=0}^{T} C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} f\left(S_1(1)\, d^k u^{T-k}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\{j\,|\,\tau(j)=const\}} p(j) = 1$$



$p(2j) = p^* p(j)$

$p(2j+1) = (1-p^*)p(j)$

p^* - мартинг. вероятность

Мартингал - это СВ, у которой усл. мат. ожидание в сл. момент равен текущему мат. ожиданию

Замечание:

В данной задаче мартингалы - это приведенная стоимость портфеля

$$Y(j) = (1+p)^{-\tau(j)} \left(S_0(j)\zeta_0(j) + S_1(j)\zeta_1(j) \right)$$

Мат. ожид.:

$$Y(2j)\,p^* + Y(2j+1)(1-p^*) = \left(S_0(j)(1+p)\zeta_0(j) + S_1(j)\,d\,\zeta_1(j) \right) p^* (1+p)^{-\tau(j)-1} +$$

$$+ \left(S_0(j)\zeta_0(j)(1+p) + S_1(j)\,u\,\zeta_1(j) \right)(1-p^*)(1+p)^{-\tau(j)-1} = $$

$= Y(j) \Rightarrow$ мартингал

Непрерывный аналог

Кокса - Росса - это ф-ла Блека - Шоулза

ММ7
20.11.19
Лист 1

$\lambda \in [d, u]$

Предложение:

Пусть функция платежа $f(S_1)$ является выпуклой. Тогда мин. сумма денег, которая позволяет, управляя портфелем из облигаций и акций, выполнить плат. обязательство $f(S_1)$ при усл., что в сл. момент времени изм. цены акции заключена в пределах $[d, u]$ опр. по ф-ле КРР:

эта цена уже не факт, что справедливая $\longrightarrow (1+\rho)^{-T}\sum_{t=0}^{T} C_T^m (p^*)^m (1-p)^{T-m} f(S_1 d^m u^{T-m})$, где $p^* = \frac{u-(1-p)}{u-d}$

Д-во:

$W(S_1, t)$

$W_1(S, T) = f(S_1) \qquad [d^T S_1(1), u^T S_1(1)]$

Индуктивное предположение: (индукция от n к 0)

$W(S_1, t)$ выпуклая ф-ция на $[d^t S_1(1), u^t S_1(1)]$

$S_1 \in [d^{t-1} S_1(1), u^{t-1} S_1(1)]$ $\qquad \zeta_0$ - вложение в облигации

ζ_1 - вложение в акции

$$\begin{cases} (1+\rho)\zeta_0 + d\zeta_1 = W(dS_1, t) \\ (1+\rho)\zeta_0 + u\zeta_1 = W(uS_1, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{W(uS_1, t) - W(dS_1, t)}{u-d} \\ \zeta_1 &= \frac{uW(dS_1, t) - dW(uS_1, t)}{u-d} \end{aligned}$$

$$(1+\rho)\zeta_0 + \zeta_1 = \frac{uW(dS_1, t) - dW(uS_1, t)}{u-d} + \lambda\frac{W(uS_1, t) - W(dS_1, t)}{u-d} =$$

$$= \frac{u-\lambda}{u-d}W(dS_1, t) + \frac{\lambda-d}{u-d}W(uS_1, t) \underset{\text{Йенсена}}{\overset{\text{нер-во}}{\geqslant}} W\left(\frac{u-\lambda}{u-d}d + \frac{\lambda-d}{u-d}u\right) = W(\lambda S_1, t)$$

из-за этого не факт, что справедливая

Проверим минимальность:

$$\begin{cases} \xi_0 + \xi_1 \to \min \\ (1+p)\xi_0 + d\xi_1 \geqslant W(dS_1, t) \\ (1+p)\xi_0 + u\xi_1 \geqslant W(uS_1, t) \end{cases}$$

$$W(S_1, t-1) = \xi_0 + \xi_1 = \frac{uW(dS_1,t) - dW(uS_1,t)}{(1+\rho)(u-d)} + \frac{W(uS_1,t) - W(dS_1,t)}{u-d} =$$

$$= \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{u-(1+\rho)}{u-d} W(dS_1,t) + \frac{(1+\rho)-d}{u-d} W(uS_1,t)\right) = \frac{1}{1+\rho}\left(p^* W(dS_1,t) + (1-p^*)W(uS_1,t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$W(S_1,t) = (1+\rho)^{-T+t} \sum_{m=0}^{T-1} C^m_{T-t} (p^*)^m (1-p^*)^{T-t-m} f(S_1 d^m u^{T-t-m})$$

Подставим в $W(S_1, t-1)$ получим то же самое $\Rightarrow$ при $t=0$ получим РКР.

§7. Модели Блэка-Шоулза и Мертона

20.11.19

7.1 Модель Блэка-Шоулза

Непрерывное время $[0, T]$

Разобьем на N отрезков $\left[0, \frac{T}{N}\right], \left[\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}\right], \ldots, \left[\frac{N-1}{N}T, T\right]$
$\quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad N$

$$\rho = \frac{rT}{N}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$$

$$p^* = \frac{u-(1+\rho)}{u-d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - \left(1+\frac{rT}{N}\right)}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}} =$$

$$= \frac{1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{N} - 1 - \frac{rT}{N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)} =$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{N}\right)}$$

$$1 - p^* = \frac{1 - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)}{2}$$

$$\zeta_j = \begin{cases} -1 & \text{с вероятностью } p^* \\ 1 & \text{с вер-тью } 1-p^* \end{cases}$$

$$\xi_N = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \qquad \xi_N = 2N - m \quad \text{с вер-тью } C_N^m (p^*)^m (1-p^*)^{N-m}$$

По ЦПТ $\dfrac{\xi_N - M\xi_N}{D\xi_N}$ слабо сх-ся к норм. расп. $N(0,1)$

$$M\xi_N = N\, M\zeta_j = N(1-2p^*) = N\left(1 - \frac{1 + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{N}\right)}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{TN} + O(1)$$

$$D\xi_N = N\left(1 - (1-2p^*)^2\right) = N + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)^2 T + O(1)$$

$$\lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{2T}{N}\right)^{-N} \sum_{m=0}^{N} C_N^m (p^*(N))^m (1-p^*(N)) \qquad f\left(S_1 e^{(N-2m)\cdot\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}\right) =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} f\left(S_1 e^{\{\sigma\sqrt{T}y + 2T - \frac{y^2 T}{2}\}}\right) dy$$

Предложение:

Справедливая цена платежного обязательства $f(S_1)$ европейского типа определяется по ф-ле:

$$u(S_1, T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} f\left(S_1 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}\right) dy$$

Пример

t - время до погашения

$$f(S_1) = (S_1 - K)_+$$

$$u(S_1, t) = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(S_1 e^{\sigma\sqrt{t}y + rt - \frac{\sigma^2}{2}t} - K \right)_+ dy$$

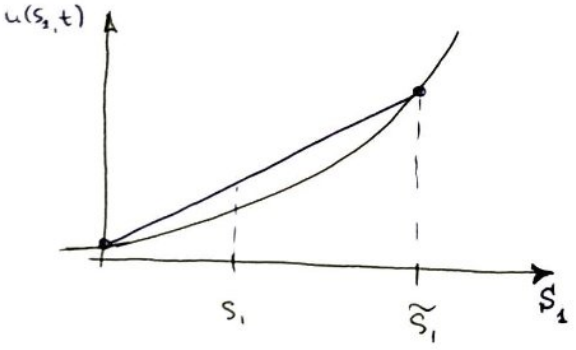
$$\Theta_-(S_1, t) = \frac{\ln \frac{S_1}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\Theta_+(S_1, t) = \frac{\ln \frac{S_1}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$u(S_1, t) = S_1 \Phi(\Theta_+(S_1,t)) - e^{-rt} K \Phi(\Theta_-(S_1,t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \rho \qquad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \Upsilon \text{ (Вега)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S_1} = \Delta \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} = \Gamma > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial T} = \Theta$$



$$\tilde{S}_1 > S_1$$

$$\frac{u(\tilde{S}_1, t) - u(S_1, t)}{\tilde{S}_1 - S_1} > \frac{u(S_1, t) - u(0, t)}{S_1 - 0} = \frac{u(S_1, t)}{S_1}$$

т.е. изменение в деривативе больше, чем у базового инструмента

$$\boxed{\frac{u(\tilde{S}_1, t) - u(S_1, t)}{u(S_1, t)} > \frac{\tilde{S}_1 - S_1}{S_1}}$$

Можем заменить переменные:

$$z = S_1 e^{\sigma\sqrt{t}y + rt - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

$$y = \frac{\ln \frac{z}{S_1} - rt + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$dy = \frac{1}{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} dz$$

$$u(S_1, t) = \frac{e^{-rt}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-\frac{\left(\ln \frac{z}{S_1} - rt + \frac{\sigma^2}{2}t\right)^2}{2(\sigma\sqrt{t})^2}} f(z)\, dz$$

Предложение:

Выходит, что справедливая цена ...

... явл. решением з. Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(S_1,t)}{\partial t} = r S_1 \dfrac{\partial u(S_1,t)}{\partial S_1} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 u(S_1,t)}{\partial S_1^2} - r u(S_1,t) \\ u(S_1,0) = f(S_1) \end{cases}$$

Замечание:

GBM: $dS = r\,dt + S\,dW$

§ 7.2. Модель Мертона

27.11.19

$d < 1+\rho < u$

$\rho = \frac{rT}{N}$ $\quad d = e^{-\sigma\frac{T}{N}}$

Цена меняется редко, но на знач. величину

$u = 1+b$ $\quad 1-p^* = \dfrac{1+\rho-d}{u-d} = \dfrac{1+\frac{rT}{N}-\left(1-\frac{\sigma T}{N}+\bar{o}(\frac{1}{N})\right)}{1+b-\left(1-\frac{\sigma T}{N}+\bar{o}(\frac{1}{N})\right)} =$

$\ominus\ 1-p^* = \dfrac{r+\sigma}{b}\dfrac{T}{N} + \bar{o}(\frac{1}{N})$

$$C(N) = (1+\rho)^{-N}\sum_{k=0}^{N} C_N^k (p^*)^{N-k}(1-p^*)^k f\left((1+b)^k e^{-\frac{\sigma+r}{b}(N-k)} S_1(0)\right)$$

$\lim\limits_{N\to\infty}$

$\left(1+\frac{rT}{N}\right)^N \to e^{+rT}$

$$C_N^k (1-p^*)^k (p^*)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}(p^*)^{N-k}(1-p^*)^k = \frac{N(N-1)\dots(N-K-1)!}{k!}\left(1-\frac{r+\sigma}{b}\frac{T}{N}+o(\frac{1}{N})\right)^{N-k}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{r+\sigma}{b}\frac{T}{N}+\bar{o}(\frac{1}{N})\right)^k \longrightarrow \frac{1}{k!}e^{-\frac{r+\sigma}{b}T}\left(\frac{r+\sigma}{b}T\right)^k$$

$$\lim_{N\to\infty} C(0) = e^{-rT}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{r+\sigma}{b}T\right)^k\cdot e^{-\frac{r+\sigma}{b}T} f\left((1+b)^k e^{-\sigma T} S_1(0)\right)$$

Т.к. в задаче КРР при λ мы будем иметь свободные деньги, то т.к. на бирже много профов, то арбитража нет.

Что с этим делать

§ 8. Теория арбитража

Ослабляем требования КРР

$t = 0, 1, \dots, T$

$(1+\rho)$ - безриск. инстр.

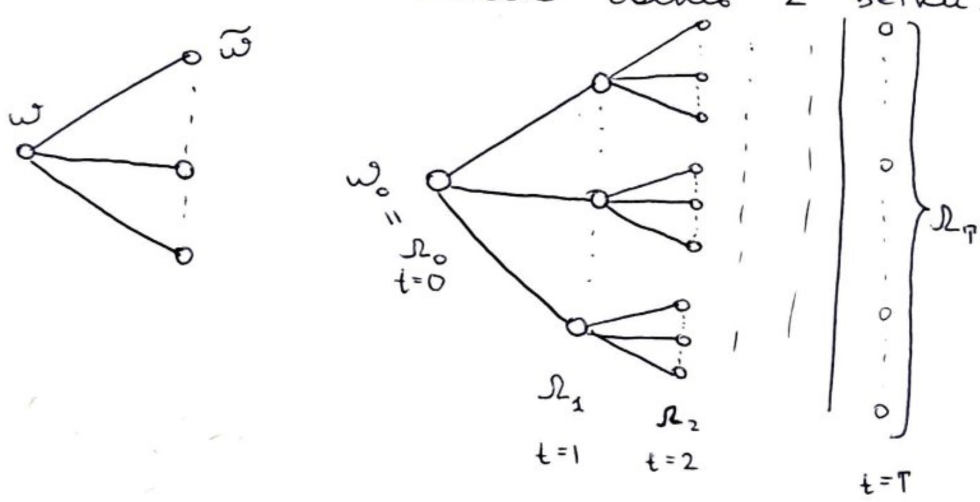
Теперь у нас есть мн-во акций (не одна)

$S_i(\omega)$ - цена акции i-го типа

$i \in M$ в сост. фин. рынка ω

В КРР в сл. момент могло быть 2 ветки.

Теперь



$\Phi_t : \Omega_t \to \Omega_{t-1}$

$t = \overline{1, T}$

Нужно задать цены в каждый момент.

- Описание рынка : $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup\limits_{t=0}^{T} \Omega_t\}$
- Платежное обяз-во : $f(\{S_j(\omega) \mid j \in M\})$ $\omega \in \Omega_T$

Введем понятие инв. стратегии

$\{\underset{\text{в облиг.}}{\xi_0(\omega)}, \underset{\text{в акцию}}{\xi_i(\omega)} \mid i \in M, \omega = \bigcup\limits_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$ Выполн. усл. самофин. портфеля

def

Будем говорить, что фин. рынок $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup\limits_{t=0}^{T} \Omega_t\}$ допускает арбитраж

Т.к. в задаче КРР при λ мы будем иметь свободные деньги, а т.к. на бирже много профов, то арбитража нет.

Что с этим делать

§ 8. Теория арбитража

Ослабляем требования КРР

$t = 0, 1, .., T$

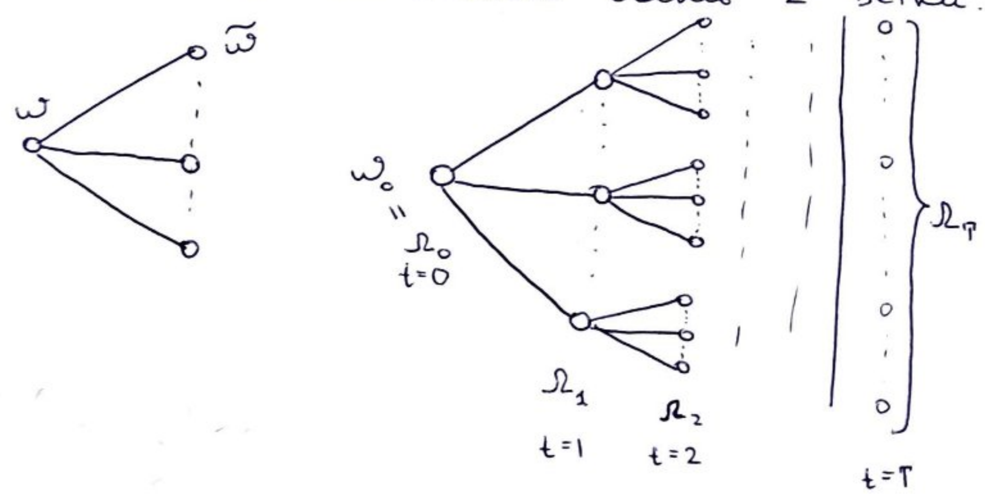
$(1+\rho)$ – безриск. инстр.

Теперь у нас есть мн-во акций (не одна)

$S_i(\omega)$ – цена акции i-го типа $i \in M$ в сост. фин. рынка ω

В КРР в сл. момент могло быть 2 ветки.

Теперь



$\Phi_t : \Omega_t \to \Omega_{t-1}$
$t = \overline{1, T}$

Нужно задать цены в каждый момент.

- Описание рынка: $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup\limits_{t=0}^{T} \Omega_t\}$
- Платежное обяз-во: $f(\{S_j(\omega) \mid j \in M\})$ $\omega \in \Omega_T$

Введем понятие инв. стратегии

$\{\underset{\text{в облиг.}}{\xi_0(\omega)}, \underset{\text{в акцию}}{\xi_i(\omega)} \mid i \in M, \omega = \bigcup\limits_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$ Выполн. усл. самофин. портфеля

def

Будем говорить, что фин. рынок $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup\limits_{t=0}^{T} \Omega_t\}$ допускает арбитраж (ζ) def

Будем говорить, что фин. рынок $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t\}$ допускает арбитраж, если $\exists$ инв. стратегия

$$\{\zeta_0(\omega), \zeta_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$$ такая, что:

$$\zeta_0(\omega_0) + \sum_{i \in M} S_i(\omega_0)\zeta_i(\omega_0) \leq 0 \quad (3) \quad \} \ \bar{p}(\omega) \geq 0$$

В противном случае (без арбитража):

(4) $$\zeta_0(\omega) + \sum_{i \in M} S_i(\omega)\zeta_i(\omega) \overset{\leq}{=} (1+\rho)\zeta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i \in M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_t(\omega)) \quad \omega \in \bigcup_{t=1}^{T-1} \Omega_t \ \} \ \bar{p}(\omega)$$

д-ва для теоремы

(5) $$(1+\rho)\zeta_0(\varphi_T(\omega)) + \sum_{i \in M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_T(\omega)) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega_T \mid \bar{p}(\omega)$$

Арбитраж - это когда

$$\exists \tilde{\omega} \in \Omega_T : (1+\rho)\zeta_0(\varphi_T(\tilde{\omega})) + \sum_{i \in M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_T(\tilde{\omega})) > 0$$

Ключевая гипотеза: Арбитража нет

Первая фунд. теорема формирования фин. активов

Для того, чтобы рынок $\{\rho, S_i(\omega) \mid i \in M, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t\}$ был безарбитражен

Н и Д

$$\exists \{p(\omega) > 0 \mid \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t\}$$ такие, что:

$$p(\omega_0) = 1 \qquad \sum_{\{\omega \mid \varphi_t(\omega) = \nu\}} p(\omega) = p(\nu) \quad \forall \nu \in \bigcup_{\tau=1}^{T-1} \Omega_\tau \quad (1)$$

Можно $p(\omega)$ интерпр. как вероятности оказаться в опр. месте

Цены на акции: $$\forall \nu \in \bigcup_{\tau=0}^{T-1} \Omega_\tau, \ i \in M \qquad S_i(\nu) = \sum_{\{\omega \mid \varphi_\tau(\omega) = \nu\}} \frac{S_t(\omega)\,p(\omega)}{(1+\rho)\,p(\nu)} \quad (2)$$

P.S. И такое распр., удовл. (1) (2) принято наз. мартингальным распр. вер-тей

Д-во:

Рассмотрим (3)-(5) и ф-ал:

$$(6)\quad \sum_{\omega\in\Omega_T}\left((1+p)\,\xi_0(\varphi_T(\omega)) + \sum_{i\in M} S_i(\omega)\,\xi_i(\varphi_T(\omega))\right) \to \max$$

- Если есть арб., то $\max \to \infty$ и не достиг.
- Если арб. нет, то $\max = 0$ и $\exists$ решение

Чтобы рынок был безарбитражен З.Л.П. (3)-(6) должна иметь решение

По т. двойственности (3)-(6) имеет решение $\Leftrightarrow$ имеет реш. дв-ая

Домножим (3)-(5) множ. Лагранжа:

$$\mathcal{L}\left(\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \mid \omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\},\ \{\tilde{p}(\omega)\mid \omega\in\bigcup_{t=0}^{T}\Omega_t\}\right) =$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega_T}(1+\tilde{p}(\omega))\left((1+p)\,\xi_0(\varphi_T(\omega)) + \sum_{i\in M} S_i(\omega)\,\xi_i(\varphi_T(\omega))\right) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\omega=\Omega_T}\tilde{p}(\omega)\Big[(1+p)\,\xi_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i\in M} S_i(\omega)\cdot\xi_t(\varphi_t(\omega)) -$$

$$- \xi_0(\omega) - \sum_{i\in M} S_i(\omega)\,\xi_i(\omega)\Big] -$$

$$- \tilde{p}(\omega_0)\left(\xi_0(\omega_0) + \sum_{i\in M} S_i(\omega_0)\,\xi_i(\omega_0)\right) = \left\{\begin{array}{l|l} \text{нет членов без } \tilde{p}(\omega) & \exists \text{ решение} \\ \Downarrow & \Updownarrow \\ \text{ф-ал в дв. задаче нулевой;} & \text{совм. ор. в дв. задаче} \end{array}\right\} =$$

$$= \xi_0(\omega_0)\left(-\tilde{p}(\omega_0) + (1+p)\sum_{t\in\Omega_1}\tilde{p}(\omega)\right) + \sum_{i\in M}\xi_i(\omega_0)\left(-\tilde{p}(\omega_0)\cdot S_t(\omega_0) + \sum_{\omega\in\Omega_1}\tilde{p}(\omega)S_i(\omega)\right) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-2}\sum_{\nu\in\Omega_t}\Big\{\xi_0(\nu)\Big(-\tilde{p}(\nu) + \sum_{\{\omega\mid\varphi_i(\omega)=\nu\}}\tilde{p}(\omega)(1+p)\Big) + \sum_{i\in M}\xi_i(\nu)\Big(-\tilde{p}(\nu)S_i(\nu) + \sum_{\{\omega\mid\varphi_i(\omega)=\nu\}} S_i(\omega)\tilde{p}(\omega)\Big)\Big\} +$$

$$+ \sum_{\nu\in\Omega_{T-1}}\Big\{\xi_0(\nu)\Big(-\tilde{p}(\nu) + \sum_{\{\omega\mid\varphi_T(\omega)=\nu\}}(1+p)\,\tilde{p}(\omega)\Big) + \sum_{i\in M}\xi_i(\nu)\Big(-\tilde{p}(\nu)\cdot S_i(\nu) + \sum_{\{\omega\mid\varphi_{t+1}=\nu\}}(1+\tilde{p}(\omega))\,S_i(\omega)\Big)\Big\}$$

ММ7
27.11.19
Лист 3

Т.к. на ξ нет огр. на знаки, то все, что на неё домн. нужно занулить:

$$\tilde{p}(\omega_0) = (1+\rho) \sum_{\omega \in \Omega_1} \tilde{p}(\omega) \qquad (7)$$

$$\tilde{p}(\nu) = (1+\rho) \sum_{\{\omega | \varphi_{t+1}(\omega) = \nu\}} \tilde{p}(\omega) \qquad \forall \nu \in \Omega_t \quad t = \overline{1, T-2} \qquad (8)$$

$$\tilde{p}(\nu) = (1+\rho) \sum_{\{\omega | \varphi_T(\omega) = \nu\}} (1 + \tilde{p}(\omega)) \qquad \forall \nu \in \Omega_{T-1}$$

$\forall i \in M \quad \forall \nu \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T-2}$

$$\tilde{p}(\nu) S_i(\nu) = \sum_{\{\omega | \varphi_{t+1}(\omega) = \nu\}} \tilde{p}(\omega) S_i(\omega) \qquad (9)$$

$\forall i \in M \quad \forall \nu \in \Omega_{T-1}$

$$\tilde{p}(\nu) S_i(\nu) = \sum_{\{\omega | \varphi(\omega) = \nu\}} (1 + \tilde{p}(\omega)) S_i(\omega) \qquad (10)$$

Заменим переменную:

$\tilde{p}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega_T \quad \tilde{p}(\omega_0) \geq 0$

$$p(\omega) = (1+\rho)^{-t} \tilde{p}(\omega) \quad \text{при} \quad t = \overline{0, T-1} \quad \omega \in \Omega_t$$

$$p(\omega) = (1+\rho)^{-T} (1 + \tilde{p}(\omega)) \quad \text{при} \quad \omega \in \Omega_T.$$

$$p(\omega) > 0 \quad \text{при} \quad \omega \in \Omega_T$$

<u>Итого:</u>

$$p(\nu) = \sum_{\{\omega | \varphi_{t+1}(\omega) = \nu\}} p(\omega) \qquad \forall \nu \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T-1}$$

$\forall i \in M \quad \forall \nu \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T-1}$

$$p(\nu) \cdot S_i(\nu) = \sum_{\{\omega | \varphi_{t+1}(\omega) = \nu\}} \frac{S_i(\omega)\, p(\omega)}{(1+\rho)}$$

$$p(\omega_0) = 1$$

<u>Закон единой цены:</u> Если есть мартинг. мера, то рынок безарбитражен.

Пусть рынок $\{\rho, S_i(\omega) \mid i\in M, \omega\in\bigcup_{t=0}^{T}\Omega_t\}$ явл. безарбитражным

и пусть 1) $\{\zeta_0(\omega), \zeta_i(\omega) \mid i\in M, \omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\}$ и

$\{\eta_0(\omega), \eta_i(\omega) \mid i\in M, \omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\}$ 2) удовл. усл. самофинанс. портфеля

и 3) в конце стоят одинаково:
$\forall\omega\in\Omega_T$

$$(1+\rho)\zeta_0(\varphi_T(\omega)) + \sum_{i\in M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_T(\omega)) = (1+\rho)\eta_0(\varphi_T(\omega)) + \sum_{i\in M} S_i(\omega)\eta_i(\varphi_T(\omega))$$

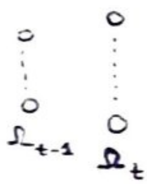
Тогда СТОИМОСТЬ В НАЧАЛЕ ОДИНАКОВЫЕ

$$\zeta_0(\omega_0) + \sum_{i\in M} S_i(\omega_0)\zeta_i(\omega_0) = \eta_0(\omega_0) + \sum_{i\in M} S_i(\omega_0)\eta_i(\omega_0)$$

<u>Д-во:</u>

11.12.19

Если стоимости совпадают в t, то и в $t-1$ они тоже совпадают.



Усл. самофин.: $(1+\rho)\zeta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_t(\omega)) =$

$$= \zeta_0(\omega) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\cdot\zeta_i(\omega)$$

равны по усл.

$$(1+\rho)\eta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\cdot\eta_i(\varphi_t(\omega)) =$$

$$= \eta_0(\omega) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\eta_i(\omega) \qquad \forall\omega\in\Omega$$

$$(1+\rho)\zeta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_t(\omega)) =$$

$$= (1+\rho)\eta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\eta_i(\varphi_t(\omega)) \qquad \forall\omega\in\Omega$$

Зафиксируем $\forall\nu\in\Omega_{t-1}$:

$$\sum_{\{\omega|\varphi_t(\omega)=\nu\}}\left\{\zeta_0(\nu)\cdot p(\omega) + \sum_{i=1}^{M}\frac{S_i(\omega)}{1+\rho}\cdot\zeta_i(\nu)\cdot p(\omega)\right\} =$$

$$= \sum_{\{\omega|\varphi_t(\omega)=\nu\}}\left\{\eta_0(\nu)p(\omega) + \sum_{i=1}^{M}\frac{S_i(\omega)}{1+\rho}\eta_i(\nu)p(\omega)\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{меняем}\\ \text{порядок}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

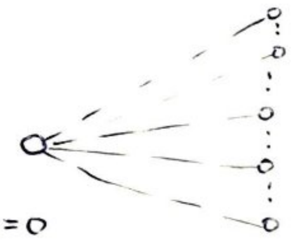
$$\Rightarrow \zeta_0(\nu)\cdot p(\nu) + \sum_{i=1}^{M}\underbrace{\left(\sum_{\{\omega|\varphi_t(\omega)=\nu\}}\frac{S_i(\omega)}{1+\rho}p(\omega)\right)}_{=S_i(\nu)p(\nu)}\zeta_i(\nu) = \eta_0(\nu)p(\nu) + \sum_{i=1}^{M}\underbrace{\left(\sum_{\{\omega|\varphi_t(\omega)=\nu\}}\frac{S_i(\omega)}{1+\rho}p(\omega)\right)}_{=S_i(\nu)p(\nu)}\eta_i(\nu)$$

сокр. на $p(\nu)$

$\Leftrightarrow \zeta_0(\nu) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\nu)\zeta_i(\nu) = \eta_0(\nu) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\nu)\eta_i(\nu)$

$\square$

Пример



$t=0$ $\quad$ $t=1$

$\Omega_1 = \{\omega_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ Тут все счётное

$I = \{i \mid i = 1, 2, \dots\}$

$p = 0 \qquad S_i(\omega_0) = 1 \qquad i = 1, 2, \dots$

$$S_i(\omega_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \\ 2, & \text{если } i = j+1 \\ 1, & \text{если } j \notin \{i, i+1\} \end{cases}$$

$\{\xi_0, \xi_1, \dots\} \in l_1$ - безарб. рынок.

П $\quad \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \leq 0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i(\omega_0)\xi_i \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots$$

$$j=1 \quad 0 \leq \xi_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \cancel{S_i(\omega_j)}\xi_i = \cancel{j=1,2,\dots} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i}_{\leq 0} - \xi_1 \leq -\xi_1$$

нет $S_i(0)$ и $S_i(1) = 0$

$$j \geq 2 \quad 0 \leq \xi_0 + 2\xi_{j-1} + \sum_{j \notin \{j, i+1\}} \xi_j = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i}_{\leq 0} + \xi_{j-1} - \xi_j \leq \xi_{j-1} - \xi_j \Rightarrow$$

$0 \geq \xi_0 \geq \dots \geq \xi_i \geq \xi_{i+1} \geq \dots \Rightarrow$ если ничего не вложим, то ничего и не получим ∎

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} p(\omega_j)$$

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} S_i(\omega_j)p(\omega_j) = \sum_{j \notin \{i, i+1\}} p(\omega_j) + 2p(\omega_{i+1}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} p(\omega_j)}_{=1} + p(\omega_{i+1}) - p(\omega_i) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p(\omega_i) = p(\omega_{i+1}) \\ \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1 \end{cases} \quad !?$$

$\Downarrow$ рынок безарб.

Вопросы, связанные с хеджированием:

$\{\rho, S_i(\omega) \mid i=1,\dots,M, \omega \in \Omega_t, t=0,\dots,T\}$ - безарб. рынок

$\{c(\omega) \mid \omega \in \Omega_T\}$ - фин. обяз-во.

def

Будем говорить, что фин. обяз-во $\{c(\omega) \mid \omega \in \Omega_T\}$ реплицируемо, если $\exists$ инв. стр. $\{\zeta_0(\omega), \zeta_i(\omega) \mid i=\overline{1,M}, \omega \in \Omega_t, t=0,1,\dots T-1\}$, кот. удовл. усл. самофинансирования и $\forall \omega \in \Omega_T$

$$(*) \quad (1+\rho)\zeta_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\Phi_T(\omega)) = c(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_T$$

Если мы начинаем котировать $c(\omega)$. Сколько будет c_{w_0} стоить?

Мы утв., что $c_{w_0} = (*)$, т.е. стоимости репл. обяз.

Иначе: 1) $> (*)$ шортим

2) $< (*)$

Не всегда пл. обяз. может быть реплицируемо.

Тогда его можно захеджировать.

def

Будем говорить, что инв. стр. $\{\zeta_0(\omega), \zeta_i(\omega) \mid i=1,\dots,M, \omega \in \Omega_t, t=0,\dots,T-1\}$, удовл. усл. самофин. явл. суперхеджирующей (субхеджирующей), если $\forall \omega \in \Omega_T$

$$(1+\rho)\zeta_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\Phi_T(\omega)) \geq c(\omega)$$

$$(\leq c(\omega))$$

т.е. мы можем покрыть убытки

СВ – Вс суперхеджирующих стратегий:

$$1)\ (11)\begin{cases} \zeta_0(\omega_0) + \sum\limits_{i=1}^{M} S_i(\omega_0)\,\zeta_i(\omega_0) \to \min & (2) \\ (1+\rho)\zeta_0(\varphi_t(\omega)) + \sum\limits_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_t(\omega)) = \zeta_0(\omega) + \sum\limits_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\omega) & \Big|\, p(\omega) \text{ + самофин.} \\ & \omega \in \Omega_t,\ t=\overline{0,T-1} \\ (1+\rho)\zeta_0(\varphi_T(\omega)) + \sum\limits_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_T(\omega)) \geq c(\omega) & \Big|\, p(\omega)\ \ \forall \omega \in \Omega_T \end{cases}$$

Для субхедж. $(\leq)$, $\to \max$

$$\tilde{p}(\omega) = (1+\rho)^{-t} p(\omega) \quad \omega \in \Omega_t \quad (t = 0, T)$$

$$\mathcal{L}\left(\{\zeta_0(\omega), \zeta_i(\omega) \mid i=\overline{1,M},\ \omega\in\Omega_t,\ t=\overline{0,T-1}\}, \{p(\omega) \mid t\in\Omega_t,\ t=\overline{0,T-1}\}\right) =$$

$$= \zeta_0(\omega_0) + \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega_0)\zeta_i(\omega_0) + \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\omega\in\Omega_t}\Big\{(1+\rho)^{-1}p(\omega)\Big(\zeta_0(\omega) - \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\omega) -$$

$$- (1+\rho)\zeta_0(\varphi_t(\omega)) - \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_t(\omega))\Big\} + \sum_{\omega\in\Omega_T}(1+\rho)^{-T}p(\omega)\Big(c(\omega) -$$

$$- (1+\rho)\zeta_0(\varphi_T(\omega)) - \sum_{i=1}^{M} S_i(\omega)\zeta_i(\varphi_T(\omega))\Big) =$$

$$= (1+\rho)^{-T}\sum_{\omega\in\Omega_T} c(\omega)p(\omega) + \zeta_0(\omega_0)\Big(1 - \sum_{\omega\in\Omega_1} p(\omega)\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M}\zeta_i(\omega_0)\Big(S_i(\omega_0) - \sum_{\omega\in\Omega_1}\frac{S_i(\omega)}{(1+\rho)}p(\omega)\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{T-1}\sum_{\nu\in\Omega_t}\Big\{\zeta_0(\nu)(1+\rho)^{-1}\Big(p(\nu) - \sum_{\{\omega \mid \varphi_{t+1}(\omega)=\nu\}} p(\omega)\Big) + \sum_{i=1}^{M}\zeta_i(\nu)(1+\rho)^{-t}\Big(p(\nu)S_i(\nu) -$$

$$- \sum_{\{\omega \mid \varphi_{t+1}(\nu)=\omega\}}\frac{S_i(\omega)}{1+\rho}p(\omega)\Big)\Big\} \Rightarrow \text{выпишем дв. к (11)}$$

$$
\begin{cases}
(1+\rho)^{-T} \sum\limits_{\omega \in \Omega_T} C(\omega) p(\omega) \to \max\ (\min) \\
p(\nu) = \sum\limits_{\{\omega \mid \varphi_{t+1}(\omega) = \nu\}} p(\omega) \qquad \forall \nu \in \Omega_t \quad t = 1, \dots, T-1 \\
1 = \sum\limits_{\omega \in \Omega_1} p(\omega) \\
S_i(\nu) p(\nu) = \sum \dfrac{S_i(\omega)}{1+\rho} p(\omega) \qquad i = \overline{1, M} \quad \nu \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T-1} \\
p(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega_T
\end{cases}
$$

Верх. оценка на евр. обяз: $(1+\rho)^{-T} \sum\limits_{\omega \in \Omega_T} C(\omega) p(\omega) \to \max$

Нижняя оценка (из субхеджа): $(1+\rho)^{-T} \sum\limits_{\omega \in \Omega_T} C(\omega) p(\omega) \to \min$

Предложение:

Пусть ф.р. $\{\rho, S_i(\omega) \mid \omega \in \Omega_t, t = \overline{0, T}\}$ - безарбитражен.
Тогда цена плат. обяз. $\{C(\omega) \mid \omega \in \Omega_T\}$ для сохр. безарбитражности должна быть

1) для реплиц. обяз. равна стоимости реплиц. портфеля в сост. ω_0 ✗

2) обяз. нереплицируемого принадлежать интервалу (C_{inf}, C_{sup}), где C_{inf} и C_{sup} опт. знач. ф-лов з.л.п. (12)

Концы не включаются, т.к. нет арбитража

ММЭ

Вторая фунд. теорема

Фин. рынок наз. полным, если любое платежное обязательство реплицируемо.

§ 9. Модель Кантора - Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала

ММЭ

18.12.19

$\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ $\quad$ a_i - денежн. поток под проект i

$a_i > 0 \Rightarrow$ прибыль от проекта

$a_i \le 0 \Rightarrow$ нужны вложения

$$NPV(\bar{a}, r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{r^j}$$

$NPV > 0 \Rightarrow$ имеет смысл подд. проект

$P(x) = \sum^{n} a_j x^j \leftarrow$ инвестиц. полином

IRR

$x = \frac{1}{r}$

Будем описывать инвест. среду набором $\bar{a} = (a_0^i, a_1, \dots, a_n^i)$ проектов $i = \overline{1, M}$, $t = 0, 1$ тиражируемых

В каждый период ~~[illegible]~~ дискр. времени можем начинать с любой интенсивностью $u_t^i \ge 0$

В мом. t: $(a_0^i u_t^i, a_1^i u_t^i, \dots, a_n^i u_t^i)$

$\uparrow t \quad \uparrow t+1 \quad \uparrow t+n$

S - св. деньги

$$S_{t+1} = S_t + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=0}^{n} a_j^i u_{t-j}^i$$

Проект депонирования:

$(-1, r_D, 0, 0, \dots)$

Проект кредита

$(1, -r_K, 0, 0, \dots)$

Проект сохр. или переноса

$(1, -1, 0, \dots)$

Хотим закончить в момент N:

$$
(1)\begin{cases}
S_N \to \max \\
S_{t+1} = S_t + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{n} a_j^i u_{t-j}^i \quad t=\overline{0,N-1} \quad i=\overline{1,M} \\
u_t \geq 0 \quad t=\overline{0,N-n} \quad i=\overline{1,M} \\
u_t = 0 \quad t=\overline{N-n+1,N-1} \quad i=\overline{1,M} \quad \leftarrow \text{усл. выхода} \\
S_t \geq 0 \quad t=\overline{0,N-1} \\
S_0 = 1
\end{cases}
$$

Пусть V_t - опт. зн. ф-ла в ЗЛП (1)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\ln V_N}{N} = \rho \quad : \quad \underset{\text{дефлятор}}{\tau} = e^{\rho}$$

$P_i(x) = \sum_i a_j^i x^j$ - инв. полином i-го порядка

$F(x) = \max\limits_{i=\overline{1,M}} P_i(x)$ - инв ф-ия пула инв. проектов

см. теорему далее

Th (Кантора – Липмана)

1) Если $F(1) \le 0$, то $V_N = 1$ (нул инв. проектов убыточен)

2) Если $F(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$, то

$\exists N_0 > 0 : N \ge N_0 \quad V_N = +\infty$ (нул допускает арбитраж)

3) Если $F(1) > 0$ и $\exists \hat{x} > 0 : F(\hat{x}) < 0$, то

$$\beta \alpha^N \le V_N \le \alpha^{N+1}, \text{ где } \beta > 0,$$
$\frac{1}{\alpha}$ – мин. положс. корень $F(x)$

Если нет усл. выхода, то $F(y) > 0 \Rightarrow S_t = \left(\frac{1}{y}\right)^t \cdot S \Rightarrow$ прибыль больше опт. Все усл. выполнены, но это пирамида

В основу док-ва можно положить т. об арбитраже.

Th об арбитраже

Если $F(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$, то $\exists N_0 > 0 : N \ge N_0 \quad V_N = +\infty$

1) Очев

3) Пусть $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ $\quad \bar{v} = (v_1, \dots, v_m)$

Конволюция $\bar{w} = \bar{u} \circ \bar{v} = (w_0, \dots, w_{m+n})$

$$W_t = \sum_{j=0}^{t} u_{t-j} v_j \qquad u_j = 0 \quad v_j = 0 \quad j < 0$$

$$a^i \circ u^i, \text{ где } \bar{u}^i = (u_0^i, \dots, u_t^i)$$

$(1, -r) \quad r < \frac{1}{\alpha}$ расш. его до $\bar{b} = (1, -r, 0, 0, \dots, 0)$

$$1 - rx \quad \text{при } x < \frac{1}{r}$$

$\max(1 - rx, F(x)) > 0$ при $x > 0 \Rightarrow \exists$ стр:

$$S = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}^i \circ \bar{u}^i + \bar{b} \circ \bar{u}^b \qquad \bar{u}^i \ge 0, \; \bar{u}^b \ge 0$$

$$N \geqslant (N_0 + n) \cdot 2$$

$$\bar{\Omega} = (1, \tau, \dots, \tau^{N-n}) > 0$$

$$\bar{b} \cdot \bar{\Omega} = (1, 0, 0, \dots, 0, \tau^{N-n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{S} \circ \bar{\Omega} = \sum_{i=1}^{N} \bar{a} \circ (\bar{u} \circ \bar{\Omega}) + \bar{u}^b \circ \bar{b} \circ \bar{\Omega} \geqslant 0$$

$$- \bar{u}^b \circ \bar{b} \circ \bar{\Omega} = (-\bar{u}^b, 0, \dots, 0, \tau^{N-n} \cdot \bar{u}^b)$$

Из этого достается ~~вер~~ нижн. оценка

Получим верхн. оценку

$$\sum_{t=0}^{N} S_{t+1} \alpha^t = \sum_{t=0}^{N-1} S_t \alpha^t + \sum_{t=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=0}^{n} u_j^i u_{t-j} \alpha^t$$

$$P_{\bar{S}}(\alpha) = \sum_{t=0}^{N-1} S_t \alpha^t \qquad P_i(\alpha) = \sum_{j=0}^{n} a_j^i \alpha^j, \quad P_{\bar{u}}(\alpha) = \sum_{t=0}^{N-1} u_t^i \alpha^t$$

$$S_N \alpha^{N-1} + \frac{1}{\alpha}\left(P_{\bar{S}}(\alpha) - 1\right) = P_{\bar{S}}(\alpha) + \sum_{i=1}^{M} \underset{\overset{\wedge}{0}}{P_i(\alpha)} \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{\bar{u}^i}(\alpha)}$$

$$P_i(\hat{\alpha}) \leqslant 0, \quad \hat{\alpha} > 0, \quad \hat{\alpha} < 1$$

$$(1, -1, 0, \dots, 0)$$

$$S_N \alpha^{N-1} \geqslant \frac{1}{\alpha} + \underset{\overset{\wedge}{0}}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{\bar{S}}(\alpha)}$$

$$S_N \leqslant \frac{1}{\alpha^N}$$

def

ММЭ

18.12.19

Будем говорить, что полинома $Q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, где $a_m > 0$

яВл. неотр., если $a_0 \geqslant 0, \ldots, a_{m-1} \geqslant 0$

Th о неотриц. полиномах

Пусть $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ полиномы: $\max_j P_j(x) > 0$ при $x > 0$

Тогда $\exists$ неотр. пол. $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$: $\sum_{j=1}^{k} P_j(x) Q_j(x)$ неотр. пол.

Для $k=1$ доказал Пуанкаре